

Dispensa di Telecomunicazioni

Prof. Bernardis Pierluigi

Classe 2 TELQ

A.S. 2026/2027

Indice

1	Carica, campo e grandezze elettriche	2
1.1	La carica elettrica	2
1.2	La forza di Coulomb	3
1.3	Il campo elettrico	4
1.4	Lavoro di una forza e lavoro elettrico	7
1.5	La tensione elettrica	9
1.6	La corrente elettrica	11
1.7	Leggi di Ohm	12
1.8	Il codice colori dei resistori	14
2	Teoria dei circuiti elettrici	17
2.1	Che cos'è un circuito elettrico	17
2.2	Generatori di tensione e di corrente	19
2.3	La legge di Kirchhoff alle Tensioni (legge delle maglie)	22
2.4	La legge di Kirchhoff alle Correnti (legge dei nodi)	25
2.5	La massa	26
2.6	Partitore di tensione	27
2.7	Partitore di corrente	28
2.8	Resistenza equivalente	30
3	Metodi di risoluzione delle reti	34
3.1	Il metodo delle correnti di maglia	34
3.2	Il principio di sovrapposizione degli effetti	35
3.3	Il teorema di Thévenin	38
3.4	Il teorema di Norton	41
3.5	Il metodo dei potenziali ai nodi	43
3.6	Il teorema di Millman	44

Capitolo 1

Carica, campo e grandezze elettriche

Concetto chiave

Questo capitolo introduce i concetti fondamentali dell'elettricità: la carica elettrica, la forza di Coulomb, il campo elettrico, il lavoro elettrico, la tensione, la corrente e la resistenza. L'obiettivo è costruire un percorso coerente che parta dalla proprietà più elementare della materia (la carica) e arrivi alle grandezze che si misurano ogni giorno in laboratorio.

1.1 La carica elettrica

La **carica elettrica** è una proprietà intrinseca della materia, esattamente come la massa. Questo significa che non è qualcosa che si aggiunge dall'esterno: è una caratteristica che i corpi possiedono per il solo fatto di essere fatti di materia. Non è possibile però darne una definizione diretta, nel senso che non possiamo dire “la carica è...” indicando qualcosa di visibile o toccabile. Possiamo soltanto **osservarne gli effetti**: attrazione, repulsione, scintille, corrente elettrica, campi elettrici. La carica, in altre parole, la conosciamo attraverso i fenomeni che produce.

La carica elettrica si misura in **coulomb** [C]. Si tratta di un'unità di misura piuttosto grande per gli standard quotidiani: la carica che si accumula strofinando un palloncino è di qualche milionesimo di coulomb.

1.1.1 Le particelle subatomiche

Per capire da dove viene la carica elettrica bisogna guardare dentro la materia. La materia è fatta di atomi, e ogni atomo è formato da particelle più piccole. Le tre particelle che ci interessano sono:

Concetto chiave

Le particelle che portano la carica

- i **protoni**, che si trovano nel nucleo dell'atomo e possiedono **carica positiva**;
- i **neutroni**, anch'essi nel nucleo, che **non possiedono carica**;
- gli **elettroni**, che orbitano attorno al nucleo e possiedono **carica negativa**.

La carica del protone e quella dell'elettrone hanno lo stesso valore assoluto, ma segno opposto. Il neutrone è elettricamente neutro, cioè non ha carica.

Il valore assoluto della carica elementare, indicato con e , è

$$e = 1,602 \times 10^{-19} [\text{C}].$$

Poiché ogni corpo è fatto di atomi, e ogni atomo contiene un numero intero di protoni ed elettroni, la carica elettrica totale di un corpo è sempre un multiplo intero di e :

$$Q = \pm n e, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In condizioni normali un corpo è **elettricamente neutro**: ha tanti protoni quanti elettroni, e le cariche positive e negative si bilanciano. Se però riusciamo a spostare qualche elettrone da un corpo a un altro, i due corpi acquistano una carica netta.

Esempio

L'esperimento del palloncino. Si strofina un palloncino di gomma sui capelli. Durante lo strofinamento, alcuni elettroni passano dai capelli al palloncino. Alla fine:

- il palloncino ha più elettroni che protoni, quindi possiede una **carica negativa**;
- i capelli hanno perso elettroni, quindi possiedono una **carica positiva**.

Se ora si avvicina il palloncino a un muro, esso vi aderisce: la carica negativa del palloncino respinge gli elettroni presenti sulla superficie del muro, lasciando esposta una zona con carica positiva che attira il palloncino. Lo stesso fenomeno si osserva avvicinando il palloncino a dei piccoli pezzetti di carta, che vengono attratti.

Concetto chiave

Regola generale. Cariche dello stesso segno si respingono; cariche di segno opposto si attraggono. Questa regola è alla base di tutti i fenomeni elettrici.

1.2 La forza di Coulomb

Tra due corpi carichi si esercita una forza. Il fisico francese Charles-Augustin de Coulomb, alla fine del Settecento, stabilì sperimentalmente che questa forza ha un'espressione molto semplice. Se si considerano due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 poste a distanza r , il modulo della forza è

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

dove k è la costante di coulomb che dipende dal mezzo in cui si trovano le cariche. Nel vuoto vale

$$k = 8,99 \times 10^9 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right].$$

La forza agisce lungo la retta che congiunge le due cariche: questa retta si chiama **congiungente**. La direzione della forza è quindi sempre quella della congiungente, mentre il verso dipende dal segno delle cariche.

Concetto chiave

Analisi della formula. La forza di Coulomb ha tre proprietà fondamentali:

- è **direttamente proporzionale** al prodotto delle cariche: se una delle due cariche raddoppia, la forza raddoppia; se raddoppiano entrambe, la forza quadruplica;
- è **inversamente proporzionale al quadrato della distanza**: se la distanza raddoppia, la forza diventa un quarto; se triplica, diventa un nono;
- ha **segno** che dipende dal prodotto $Q_1 Q_2$: se le cariche sono concordi la forza è positiva (repulsiva), se sono discordi è negativa (attrattiva).

1.2.1 L'analisi dimensionale della costante k

Possiamo ricavare le unità di misura di k a partire dalla legge di Coulomb. Scriviamo la formula del modulo

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

e sostituiamo le unità di misura di ciascuna grandezza:

$$[\text{N}] = [k] \cdot \frac{[\text{C}] \cdot [\text{C}]}{[\text{m}]^2}.$$

Isolando $[k]$ si ottiene

$$[k] = \frac{[\text{N}] \cdot [\text{m}]^2}{[\text{C}]^2}.$$

Questa è l'unità di misura della costante di Coulomb nel Sistema Internazionale. Esprimendo il newton come chilogrammo per metro su secondo quadro, si ha anche

$$[k] = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}]^3}{[\text{s}]^2 \cdot [\text{C}]^2}.$$

Lo sapevi?

L'analisi dimensionale non serve solo a scrivere correttamente le unità di misura, ma anche a controllare la coerenza di una formula. Se da un calcolo risultasse un'unità di misura diversa da quella attesa, ci sarebbe sicuramente un errore da qualche parte.

1.3 Il campo elettrico

Quando due cariche interagiscono, si può pensare che la forza si eserciti “a distanza”, cioè senza che ci sia nulla in mezzo. In realtà il modo moderno di descrivere questa interazione è diverso: si dice che una carica **modifica lo spazio** attorno a sé, creando un **campo elettrico**. Una seconda carica posta in quel punto risente del campo e quindi di una forza.

Il campo elettrico è una grandezza **vettoriale** e si indica con $\vec{E}$. Esso descrive l'effetto che una configurazione di cariche produce in ogni punto dello spazio, indipendentemente dal fatto che in quel punto ci sia o meno una carica che lo subisce.

1.3.1 Definizione operativa

Per definire il campo elettrico in un punto si utilizza una **carica di prova**, cioè una carica piccolissima (in modo che non disturbi la configurazione delle cariche che generano il campo) e positiva (per convenzione). Se in un punto dello spazio si pone una carica di prova q_0 e questa risente di una forza $\vec{F}$, il campo elettrico in quel punto è definito come

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Il campo elettrico è quindi la **forza per unità di carica**. La sua unità di misura è il newton su coulomb:

$$[E] = \frac{[N]}{[C]} = \left[\frac{N}{C} \right].$$

Concetto chiave

Il campo elettrico è definito come rapporto tra la forza di Coulomb che agisce su una carica di prova q_0 e la carica di prova stessa. Il campo non dipende da q_0 , ma solo dalla configurazione di cariche che lo genera. Cambiando la carica di prova, la forza cambia in proporzione, ma il loro rapporto rimane costante.

1.3.2 Il campo di una carica puntiforme

Se la carica che genera il campo è una carica puntiforme Q , e la carica di prova q_0 si trova a distanza r da essa, la forza di Coulomb vale

$$F = k \frac{Q q_0}{r^2}.$$

Dividendo per q_0 si ottiene il modulo del campo elettrico:

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{Q}{r^2}.$$

Il campo elettrico di una carica puntiforme è quindi direttamente proporzionale alla carica che lo genera e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

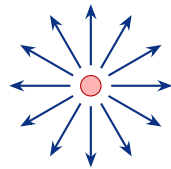
1.3.3 Campo di corpi positivi e negativi

Concetto chiave

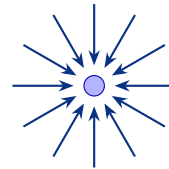
Linee di campo di una carica puntiforme

- se Q è **positiva**, il campo elettrico punta **verso l'esterno**: le linee di campo escono dalla carica e si allontanano da essa;
- se Q è **negativa**, il campo elettrico punta **verso l'interno**: le linee di campo entrano nella carica.

Il campo elettrico è sempre diretto lungo la congiungente tra la carica che lo genera e il punto in cui si misura.



Campo di una carica
positiva



Campo di una carica
negativa

Esempio

Il campo elettrico e il campo gravitazionale.

La Terra ha una massa enorme e, per questo, **genera attorno a sé un campo gravitazionale**. In ogni punto dello spazio vicino alla Terra, un oggetto lasciato libero risente di una forza diretta verso il centro della Terra. Questo campo esiste indipendentemente dal fatto che ci sia qualcuno a sentirlo: esiste perché c'è la Terra.

Ora immagina di voler **misurare** il campo gravitazionale in un punto vicino alla superficie terrestre. Per farlo, potresti prendere un oggetto e lasciarlo cadere. Ma attenzione: se prendessi un oggetto enorme, come una seconda Luna, la sua stessa massa modificherebbe il campo gravitazionale terrestre nel punto in cui la metti. Il campo che misureresti non sarebbe più quello della Terra da sola, ma quello della Terra *più* l'oggetto che hai aggiunto. Non avresti misurato il campo della Terra: avresti misurato un campo diverso.

Per questo, per misurare il campo gravitazionale della Terra, si prende un oggetto **piccolissimo**, una persona per esempio. La sua massa è così piccola che la sua presenza **non modifica il campo gravitazionale della Terra**. Il campo che si misura è quindi davvero quello generato dalla Terra, non quello di un sistema Terra-persona.

Questo è esattamente lo stesso ragionamento che si fa con il campo elettrico:

- La **Terra** è come la carica Q che genera il campo;
- il **campo gravitazionale** della Terra è come il **campo elettrico** $\vec{E}$ generato da Q ;
- la **persona** è come la **carica di prova** q_0 ;
- la **forza** che la persona sente cadendo è come la **forza elettrica** $\vec{F}$ che agisce sulla carica di prova.

La persona deve essere piccolissima, altrimenti modificherebbe il campo che vogliamo misurare. Allo stesso modo, la carica di prova q_0 deve essere piccolissima, altrimenti la sua presenza altererebbe la configurazione delle cariche che generano il campo. Solo così possiamo dire di aver misurato il campo *generato da Q* , e non un campo modificato dalla carica di prova stessa.

Ed è per questo che il campo elettrico, definito come $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$, **non dipende da q_0** : se la carica di prova raddoppia, la forza raddoppia, ma il loro rapporto resta lo stesso. Il campo è una proprietà del punto dello spazio, non della carica che vi si mette dentro.

1.4 Lavoro di una forza e lavoro elettrico

Prima di parlare di lavoro elettrico, è necessario ricordare che cosa si intende, in fisica, per **lavoro**. Si consideri una forza costante $\vec{F}$ applicata a un corpo che si sposta di un tratto $\vec{s}$. In generale forza e spostamento non hanno la stessa direzione: formano tra loro un angolo ϑ . In questo caso il lavoro non è un semplice prodotto tra i moduli, ma è il **prodotto scalare** tra il vettore forza e il vettore spostamento:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \vartheta,$$

dove F è il modulo della forza, s è il modulo dello spostamento e ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori. Il lavoro è quindi una grandezza **scalare**, non vettoriale, e si misura in **joule** [J].

1.4.1 Il ruolo del coseno di ϑ

Per capire perché il lavoro dipende dall'angolo, conviene guardare direttamente il fattore $\cos \vartheta$. Esso è un numero puro, compreso tra -1 e $+1$, che “pesa” il prodotto dei moduli $F s$ a seconda dell'orientamento reciproco dei due vettori. È proprio il coseno, e non la forza né lo spostamento, a determinare **segno** e **intensità** del lavoro.

I valori notevoli del coseno per gli angoli fondamentali sono i seguenti:

ϑ	$\cos \vartheta$	$L = F s \cos \vartheta$
0°	$+1$	$+F s$ (massimo positivo)
60°	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2} F s$
90°	0	0 (nullo)
120°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} F s$
180°	-1	$-F s$ (massimo negativo)

- **per** $0^\circ < \vartheta < 90^\circ$ il coseno è positivo, quindi il lavoro è positivo: la forza ha una componente concorde allo spostamento e trasferisce energia al corpo;
- **per** $\vartheta = 90^\circ$ il coseno è nullo, quindi il lavoro è nullo: la forza non ha componente lungo lo spostamento e non trasferisce energia;
- **per** $\vartheta > 90^\circ$ il coseno è negativo, quindi il lavoro è negativo: la forza ha una componente opposta allo spostamento e sottrae energia al corpo.

Concetto chiave

- $\vartheta = 0^\circ$: **forza e spostamento concordi**. In questo caso $\cos \vartheta = 1$ e il lavoro vale $L = F s \cos 0^\circ = F s > 0$. La forza è parallela e concorde allo spostamento: essa “accompagna” il moto e **trasferisce energia** al corpo. Il lavoro è massimo e positivo. È il caso, per esempio, della forza di gravità su un corpo che cade verticalmente.
- $\vartheta = 90^\circ$: **forza e spostamento perpendicolari**. In questo caso $\cos \vartheta = 0$ e il lavoro vale $L = F s \cos 90^\circ = 0$. La forza non compie alcun lavoro sul corpo, indipendentemente da quanto sia intensa e da quanto sia lungo lo spostamento. Questo non significa che la forza sia assente, ma che essa **non trasferisce né sottrae energia** lungo quello spostamento.
- $\vartheta = 180^\circ$: **forza e spostamento opposti**. In questo caso $\cos \vartheta = -1$ e il lavoro vale $L = F s \cos 180^\circ = -F s < 0$. La forza è parallela ma opposta allo spostamento: essa “frena” il moto e **sottrae energia** al corpo. Il lavoro è massimo in modulo ma negativo. È il caso della forza di attrito su un corpo che scivola.

Esempio

Il lavoro che compie la forza di gravità su un corpo che cade verticalmente è positivo: la forza di gravità è concorde allo spostamento, aiuta il corpo a muoversi e gli trasferisce energia.

Il lavoro che compie la forza di attrito su un corpo che scivola su un piano inclinato è negativo: la forza di attrito è opposta allo spostamento, si oppone al movimento e sottrae energia al corpo.

Il lavoro che compie la forza di gravità su un corpo che si muove in orizzontale è nullo: la forza di gravità è perpendicolare allo spostamento, curva eventualmente la traiettoria ma non trasferisce energia al corpo.

Concetto chiave

Il lavoro è il modo con cui una forza trasferisce energia a un corpo. Un lavoro positivo aumenta l'energia del corpo; un lavoro negativo la diminuisce; un lavoro nullo non la modifica. Il caso nullo non è un caso limite trascurabile: è il caso in cui la forza agisce perpendicolarmente al moto e si limita a orientarlo.

1.4.2 Il lavoro elettrico

Nel caso della forza elettrica, il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb su una carica che si sposta da un punto A a un punto B si chiama **lavoro elettrico**. La forza elettrica che agisce su una carica Q immersa in un campo elettrico $\vec{E}$ è

$$\vec{F}_e = Q \vec{E}.$$

Anche qui vale la forma generale con il prodotto scalare: se la carica si sposta di un tratto $\vec{s}$ e l'angolo tra $\vec{F}_e$ e $\vec{s}$ è ϑ , il lavoro elettrico è

$$L_e = \vec{F}_e \cdot \vec{s} = F_e s \cos \vartheta = Q E s \cos \vartheta.$$

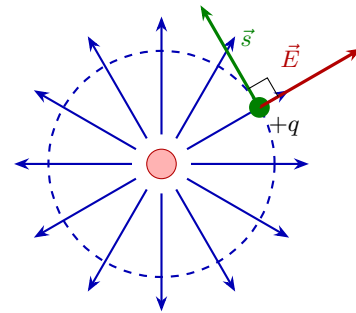
Il lavoro elettrico si misura anch'esso in **joule** [J]. Anche nel caso elettrico, dunque, non basta conoscere l'intensità della forza e la lunghezza dello spostamento: occorre conoscere l'angolo tra essi.

- **Carica positiva che si muove nel verso del campo ($\vartheta = 0^\circ$).** Una carica positiva $Q > 0$ posta in un campo elettrico $\vec{E}$ risente di una forza $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ nello stesso verso del campo. Se la carica si sposta nel verso del campo, forza e spostamento sono concordi, $\cos \vartheta = 1$, e il lavoro elettrico è positivo: la forza elettrica “accompagna” la carica, le trasferisce energia e il campo compie lavoro su di essa.
- **Carica negativa che si muove nel verso del campo ($\vartheta = 180^\circ$).** Una carica negativa $Q < 0$ posta nello stesso campo risente di una forza $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ **opposta** al campo. Se la carica si sposta nel verso del campo, forza e spostamento sono antiparalleli, $\cos \vartheta = -1$, e il lavoro elettrico è negativo: la forza elettrica “frena” la carica, le sottrae energia e il campo subisce lavoro da essa.
- **Spostamento perpendicolare al campo ($\vartheta = 90^\circ$).** Se la carica si sposta in direzione perpendicolare al campo elettrico, allora $\cos \vartheta = 0$ e il lavoro elettrico è nullo. La forza elettrica agisce, curva eventualmente la traiettoria, ma non compie lavoro sulla carica. Questo è esattamente il motivo per cui, lungo le superfici equipotenziali, il campo elettrico non compie lavoro: le superfici equipotenziali sono per definizione perpendicolari alle linee di campo, e uno spostamento lungo di esse è perpendicolare a $\vec{E}$.

Lungo una circonferenza centrata su una carica Q , il campo elettrico $\vec{E}$ è sempre **radiale**, cioè diretto lungo il raggio. Se una carica di prova q si muove lungo la circonferenza, il suo spostamento è sempre **tangente** alla curva. Raggio e tangente sono perpendicolari in ogni punto: quindi l'angolo tra $\vec{E}$ e lo spostamento è sempre 90° , e $\cos 90^\circ = 0$.

Poiché il lavoro è proporzionale a $\cos \vartheta$, e $\cos 90^\circ = 0$, il lavoro compiuto dal campo su ogni tratto del percorso è nullo. Di conseguenza:

- il campo non trasferisce né sottrae energia alla carica;
- la curva è detta **equipotenziale**.



Concetto chiave

Una curva equipotenziale attorno a una carica puntiforme è una circonferenza perché tutti i suoi punti si trovano alla stessa distanza dal centro, garantendo così che il valore del potenziale elettrico $E = k \frac{Q}{r^2}$ rimanga costante lungo tutto il percorso.

1.5 La tensione elettrica

A partire dal lavoro elettrico si può definire una grandezza molto importante: la **tensione elettrica**, o **differenza di potenziale**. La tensione tra due punti A e B di un circuito è definita come il **lavoro elettrico per unità di carica** compiuto per spostare una carica da A a B:

$$V_{AB} = \frac{L_e}{Q}.$$

La tensione si misura in **volt** [V], e vale la relazione

$$1 \text{ [V]} = 1 \left[\frac{\text{J}}{\text{C}} \right].$$

In altre parole, se per spostare una carica di 1 C da A a B il campo elettrico compie un lavoro di 1 J, allora la tensione tra A e B è di 1 V.

Concetto chiave

Interpretazione fisica. La tensione è la “spinta” che il campo elettrico esercita su ogni unità di carica. È una proprietà della coppia di punti A e B, non della carica che si sposta: se la carica raddoppia, il lavoro raddoppia, ma il loro rapporto rimane invariato.

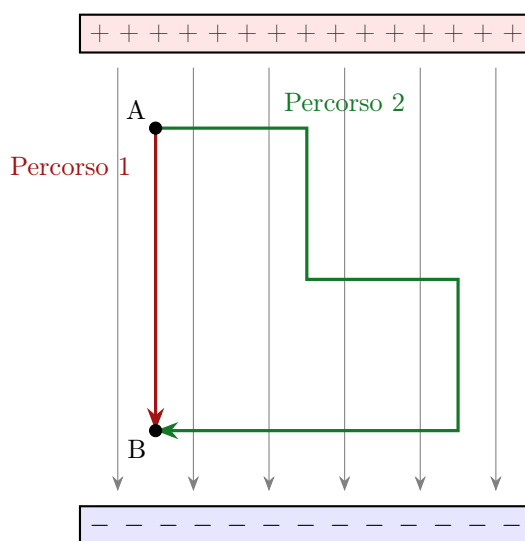
Esempio

La tensione di una pila. Una pila stilo ha una tensione di circa 1,5 V. Questo significa che, per spostare una carica di 1 C dal polo negativo al polo positivo all'interno della pila, il campo elettrico compie un lavoro di 1,5 J. La pila è quindi un dispositivo che mantiene una differenza di potenziale tra i suoi due terminali.

1.5.1 La tensione non dipende dal percorso

La tensione è stata definita come lavoro elettrico per unità di carica. A questo punto sorge spontanea una domanda: se il lavoro dipendesse dal percorso scelto per andare da A a B, anche la tensione ne dipenderebbe, e non avrebbe senso parlare di “tensione tra due punti”. Per fortuna, la forza elettrica ha una proprietà molto importante: il lavoro che essa compie non dipende dal percorso, ma solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo.

Per capire questo concetto, si consideri un campo elettrico uniforme, per esempio quello che si crea tra due piastre piane parallele cariche di segno opposto. In un campo uniforme, il campo elettrico ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in tutti i punti. Si supponga di voler spostare una carica Q da un punto A a un punto B, e di poter scegliere tra due percorsi diversi.



Lungo il **Percorso 1**, la carica si muove parallelamente al campo. Poiché la forza elettrica è diretta lungo il campo, in ogni tratto la forza e lo spostamento sono paralleli e concordi. Il lavoro totale è

$$L_1 = Q \cdot E \cdot d,$$

dove d è la distanza tra A e B lungo la direzione del campo.

Lungo il **Percorso 2**, la carica si muove prima perpendicolarmente al campo, poi parallelamente, poi di nuovo perpendicolarmente. Nei tratti perpendicolari, la forza elettrica è perpendicolare allo spostamento, quindi il lavoro compiuto è nullo. Solo nel tratto parallelo il lavoro è diverso da zero, e vale ancora $Q \cdot E \cdot d$. Di conseguenza

$$L_2 = Q \cdot E \cdot d = L_1.$$

Qualunque percorso si scelga, spezzandolo in tanti piccoli tratti paralleli e perpendicolari al campo, si ottiene sempre lo stesso risultato: il lavoro dipende solo dalla componente dello spostamento lungo la direzione del campo, cioè dalla “differenza di quota elettrica” tra A e B. I tratti perpendicolari non contribuiscono al lavoro, quelli paralleli si sommano algebricamente.

Concetto chiave

La tensione non dipende dal percorso. Il lavoro elettrico compiuto per spostare una carica da un punto A a un punto B dipende solo dai due punti, non dal cammino seguito. Di conseguenza, anche la tensione $V_{AB} = \frac{L_e}{Q}$ dipende solo da A e B, e non dal percorso. Questa proprietà si esprime dicendo che **la forza elettrica è conservativa**.

Esempio

Il paragone con la forza peso. Immagina di dover portare una valigia dal primo piano al terzo piano di un palazzo. Puoi salire dritto per le scale, oppure fare un giro tortuoso passando per altri piani. Il lavoro compiuto contro la forza di gravità è sempre lo stesso, perché dipende solo dal dislivello tra il punto di partenza e quello di arrivo.

Concetto chiave

Il filo conta solo per quello che collega. Nei circuiti ideali, il filo che collega due punti ha una forma che non conta nulla: potrebbe essere dritto, attorcigliato su se stesso, cortissimo o lunghissimo, passare da una parte o dall'altra del circuito. Quello che conta, e che determina i calcoli, è soltanto **tra quali punti** il filo è collegato. La tensione tra due punti di un circuito è sempre la stessa, indipendentemente da come sono fisicamente collegati. Per questo motivo, nei disegni dei circuiti, i fili si rappresentano sempre come segmenti dritti e puliti: la forma è solo una comodità grafica, non ha alcun significato elettrico.

1.6 La corrente elettrica

La **corrente elettrica** è un flusso ordinato di cariche elettriche che si muovono tutte nella stessa direzione. Per quantificarla si introduce una grandezza che misura “quanta carica passa attraverso una sezione del conduttore nell’unità di tempo”. Questa grandezza si chiama **intensità di corrente** e si indica con I . La corrente è definita come il rapporto tra la carica ΔQ che attraversa una sezione del conduttore e l’intervallo di tempo Δt in cui avviene il passaggio:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

L’intensità di corrente si misura in **ampere** [A], e vale la relazione

$$1 \text{ [A]} = 1 \left[\frac{\text{C}}{\text{s}} \right].$$

Da questa definizione si ricavano immediatamente le due formule inverse:

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\Delta Q}{I}.$$

Concetto chiave

Verso convenzionale della corrente. Per ragioni storiche, il verso convenzionale della corrente è quello che va dal polo positivo al polo negativo, anche se in realtà gli elettroni si muovono in senso opposto. Questa convenzione è ancora oggi universalmente accettata.

Esempio**Valori tipici di corrente**

- caricabatterie di un telefonino: circa 1 [A];
- forno elettrico: circa 10 [A];
- fulmine: fino a 30 000 [A], per un tempo brevissimo.

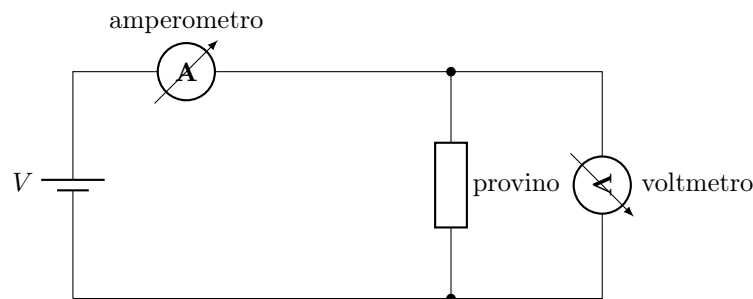
1.7 Leggi di Ohm

L'esperimento di Ohm

Georg Simon Ohm, all'inizio del XIX secolo, si pose una domanda semplice: *come varia la corrente che attraversa un conduttore al variare della tensione applicata ai suoi capi?* Per rispondere, utilizzò un **provino cilindrico**, cioè un filo conduttore di forma cilindrica, di lunghezza l e sezione S note, collegato a un generatore di tensione variabile.

Lo schema dell'esperimento è il seguente:

- un **generatore di tensione variabile** applica ai capi del provino una tensione V , che può essere cambiata a piacere, rappresentata nel circuito seguente con una batteria;
- un **voltmetro** misura la tensione V ai capi del provino;
- un **amperometro** misura la corrente I che lo attraversa.



Ohm variò la tensione e registrò, per ogni valore, la corrente. Riportando i dati sul piano cartesiano, con:

- la **tensione V sulle ascisse** (è la grandezza che imponiamo, quindi la variabile indipendente);
- la **corrente I sulle ordinate** (è la grandezza che misuriamo, quindi la variabile dipendente),

si osserva che i punti si dispongono su una **retta passante per l'origine**. Questo significa che I è direttamente proporzionale a V :

$$I \propto V.$$

1.7.1 La prima legge di Ohm

Il rapporto V/I è quindi costante per quel provino e Ohm la chiamò **resistenza elettrica** e la indicò con R :

$$\frac{V}{I} = \text{costante} = R.$$

Questa è la **prima legge di Ohm**. Da essa si ricavano le due forme inverse:

$$V = R \cdot I, \quad I = \frac{V}{R}.$$

Attenzione

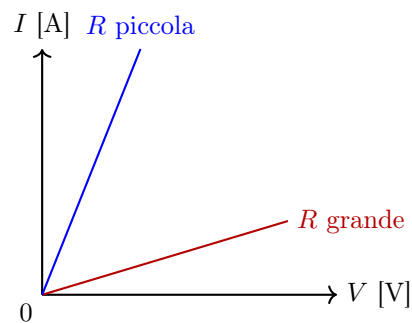
La legge di Ohm vale solo per i conduttori **ohmici**, cioè quelli per cui il rapporto $\frac{V}{I}$ rimane costante al variare della tensione. Un filo metallico a temperatura costante è ohmico; altri componenti, come le lampadine a incandescenza, non seguono esattamente la legge di Ohm perché la loro resistenza cambia con la temperatura.

Il grafico I - V

Nel grafico I - V , la legge di Ohm diventa

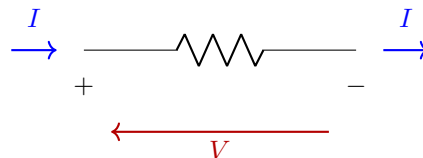
$$I = \frac{1}{R} V,$$

cioè una retta passante per l'origine con **coefficiente angolare** $1/R$. Più R è grande, più la retta è **piatta**; più R è piccola, più la retta è **ripida**.



Il verso della corrente e il verso della tensione

Consideriamo un resistore disposto orizzontalmente, percorso da una corrente I diretta verso destra. Ai suoi capi è applicata una tensione V , rappresentata da una freccia diretta verso sinistra. A prima vista i due versi sembrano in contraddizione: perché mai la tensione “va” in senso opposto alla corrente?



Perché i versi sono opposti. La discordanza è solo apparente e nasce dal modo in cui si definiscono I e V .

- Il **verso della corrente** è convenzionale: si assume come flusso di **cariche positive**. Nei metalli si muovono gli elettroni (cariche negative) in verso opposto, ma la convenzione storica è quella delle cariche positive. Quindi la freccia blu verso destra indica il verso convenzionale di I .
- Il **verso della tensione** è definito come differenza di potenziale $V = V_A - V_B$, dove A è il punto verso cui punta la freccia. La freccia rossa va quindi dal potenziale **minore** al potenziale **maggiore**: indica il punto a potenziale più alto.

Nel disegno, il morsetto a sinistra è a potenziale maggiore (+) e quello a destra a potenziale minore (−). La corrente, spinta dal potenziale più alto a quello più basso, scorre da **sinistra verso destra**. La tensione, essendo definita come $V_A - V_B$ con A il punto verso cui punta la freccia, punta invece da **destra verso sinistra**, cioè dal potenziale minore al maggiore. In questo modo i conti tornano: la corrente va verso destra (dal + al −), la tensione punta verso sinistra (dal − al +).

1.7.2 La seconda legge di Ohm

La prima legge di Ohm lega tensione, corrente e resistenza, ma non spiega da che cosa dipenda la resistenza di un conduttore. La **seconda legge di Ohm** risponde a questa domanda: la resistenza di un conduttore dipende dal materiale di cui è fatto, dalla sua lunghezza e dalla sua sezione.

Riprendiamo il **provino cilindrico** dell'esperimento di Ohm: un filo di lunghezza l e sezione S . La sua resistenza dipende da tre fattori:

- dal **materiale**: alcuni materiali conducono meglio di altri. Questa proprietà si chiama **resistività** e si indica con la lettera greca ρ ;

- dalla **lunghezza** del filo: più il filo è lungo, più le cariche devono attraversare materiale, e più la resistenza è alta. La resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza l ;
- dalla **sezione** del filo: più il filo è grosso, più spazio hanno le cariche per passare, e più la resistenza è bassa. La resistenza è inversamente proporzionale alla sezione S .

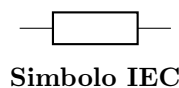
La seconda legge di Ohm si esprime nella forma

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S},$$

dove R è la resistenza $[\Omega]$, ρ è la resistività del materiale $[\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}]$, l è la lunghezza $[\text{m}]$ e S è la sezione trasversale $[\text{mm}^2]$.

1.7.3 I resistori e la simbologia

Un componente progettato specificamente per avere una resistenza ben definita si chiama **resistore**. Nei circuiti si rappresenta in due modi:



Attenzione

Il **simbolo IEC** (rettangolo) è quello più usato in Europa. Il **simbolo ANSI** (zigzag) è usato nel mondo anglosassone e in molti software di simulazione. In questa dispensa si utilizzerà prevalentemente il simbolo ANSI, che è quello più diffuso nei libri di testo in uso.

1.8 Il codice colori dei resistori

I resistori sono spesso troppo piccoli per riportare stampato il loro valore. Per questo motivo si utilizza un codice normalizzato a bande colorate. Ogni banda corrisponde a una cifra, a un moltiplicatore, a una tolleranza oppure, nei resistori a 6 bande, a un coefficiente di temperatura.

Per leggere correttamente un resistore bisogna orientarlo nel verso giusto: si parte dal lato in cui le bande sono più vicine tra loro. La banda di tolleranza, invece, è generalmente separata dalle altre e si trova all'altra estremità. Se il resistore ha 6 bande, l'ultima banda è il coefficiente di temperatura.

Concetto chiave

Struttura generale del codice colori

- **4 bande:** 1^a cifra, 2^a cifra, moltiplicatore, tolleranza;
- **5 bande:** 1^a cifra, 2^a cifra, 3^a cifra, moltiplicatore, tolleranza;
- **6 bande:** 1^a cifra, 2^a cifra, 3^a cifra, moltiplicatore, tolleranza, coefficiente di temperatura.

	Colore	Cifra	Moltiplicatore	Tolleranza	Coeff. temp.
	Nero	0	$\times 10^0$	—	—
	Marrone	1	$\times 10^1$	$\pm 1\%$	100 ppm/°C
	Rosso	2	$\times 10^2$	$\pm 2\%$	50 ppm/°C
	Arancione	3	$\times 10^3$	—	15 ppm/°C
	Giallo	4	$\times 10^4$	—	25 ppm/°C
	Verde	5	$\times 10^5$	$\pm 0,5\%$	—
	Blu	6	$\times 10^6$	$\pm 0,25\%$	10 ppm/°C
	Viola	7	$\times 10^7$	$\pm 0,1\%$	5 ppm/°C
	Grigio	8	$\times 10^8$	$\pm 0,05\%$	—
	Bianco	9	$\times 10^9$	—	—
	Oro	—	$\times 10^{-1}$	$\pm 5\%$	—
	Argento	—	$\times 10^{-2}$	$\pm 10\%$	—

1.8.1 Come calcolare il valore

Per un resistore a **4 bande**, dette d_1 e d_2 le prime due cifre e m il moltiplicatore, si ha

$$R = (10 d_1 + d_2) \times 10^m [\Omega].$$

La quarta banda indica la tolleranza.

Per un resistore a **5 bande** o a **6 bande**, dette d_1 , d_2 , d_3 le prime tre cifre e m il moltiplicatore, si ha

$$R = (100 d_1 + 10 d_2 + d_3) \times 10^m [\Omega].$$

Nel resistore a 5 bande la quinta banda indica la tolleranza; nel resistore a 6 bande la quinta banda indica la tolleranza e la sesta il coefficiente di temperatura.

Esempio

Resistore a 4 bande. Le bande sono: giallo, viola, rosso, oro.

- giallo = 4, viola = 7;
- rosso = $\times 10^2$;
- oro = $\pm 5\%$.

Quindi

$$R = 47 \times 10^2 [\Omega] = 4700 [\Omega] = 4,7 [\text{k}\Omega],$$

con tolleranza $\pm 5\%$.

Esempio

Resistore a 5 bande. Le bande sono: rosso, viola, nero, marrone, marrone.

- rosso = 2, viola = 7, nero = 0;
- marrone = $\times 10^1$;
- marrone = $\pm 1\%$.

Quindi

$$R = 270 \times 10^1 [\Omega] = 2700 [\Omega] = 2,7 [\text{k}\Omega] \pm 1\%,$$

Esempio

Resistore a 6 bande. Le bande sono: rosso, viola, nero, marrone, marrone, rosso.

Il valore è ancora

$$R = 2,7 \text{ [k}\Omega] \pm 1\%.$$

La sesta banda, rossa, indica un coefficiente di temperatura di 50 ppm/°C.

1.8.2 Le serie di valori normalizzati

Con il termine **serie**, nel contesto dei resistori, si intendono le **serie E** di valori normalizzati. Non tutti i valori di resistenza esistono in commercio: i produttori realizzano solo alcuni valori standard, distribuiti in modo logaritmico all'interno di ogni decade.

Le serie più comuni sono:

- **E6:** 6 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 20\%$;
- **E12:** 12 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 10\%$;
- **E24:** 24 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 5\%$;
- **E48:** 48 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 2\%$;
- **E96:** 96 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 1\%$;
- **E192:** 192 valori per decade, tolleranza tipica $\pm 0,5\%$.

Per esempio, nella serie E12 i valori principali sono:

$$10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82.$$

Moltiplicando o dividendo questi valori per potenze di 10 si ottengono tutti gli altri valori della serie.

Capitolo 2

Teoria dei circuiti elettrici

Concetto chiave

Questo capitolo introduce i concetti fondamentali della teoria dei circuiti: che cos'è un circuito elettrico, che cosa sono un nodo e una maglia, e come si applicano le due leggi di Kirchhoff per analizzare circuiti semplici. Le leggi di Kirchhoff sono gli strumenti di base per risolvere qualsiasi circuito, dal più semplice al più complesso, e costituiscono il ponte tra i concetti di tensione e corrente introdotti nel capitolo precedente e la risoluzione concreta dei problemi circuitali.

2.1 Che cos'è un circuito elettrico

Un **circuito elettrico** è un insieme di componenti elettrici collegati tra loro in modo da formare un **percorso chiuso** attraverso il quale può fluire la corrente elettrica. Il percorso chiuso è la condizione essenziale: se il percorso non è chiuso, la corrente non può circolare.

I componenti che si incontrano in un circuito si possono raggruppare in tre categorie fondamentali:

Concetto chiave

Componenti fondamentali di un circuito

- i **generatori**, che mantengono una differenza di potenziale tra i loro terminali e forniscono energia al circuito (pile, batterie, alimentatori);
- i **conduttori**, cioè i fili che collegano tra loro i componenti e permettono il passaggio della corrente;
- gli **utilizzatori**, che assorbono energia elettrica e la trasformano in altre forme di energia (lampadine, resistori, motori).

Un circuito si dice **aperto** quando il percorso è interrotto in almeno un punto: in questo caso la corrente non circola. Si dice **chiuso** quando il percorso è completo: la corrente può circolare. Un interruttore è un dispositivo che permette di aprire o chiudere volontariamente un circuito.

Esempio

La torcia. Una torcia è un circuito semplicissimo: una pila, due fili, una lampadina e un interruttore. Quando l'interruttore è chiuso, il percorso è completo, la corrente circola e la lampadina si accende. Quando l'interruttore è aperto, il percorso è interrotto e la lampadina si spegne.

Attenzione

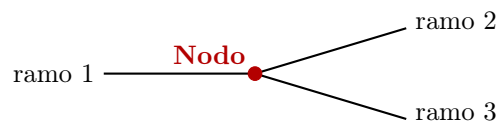
In un circuito reale i fili hanno una resistenza piccolissima ma non nulla. Nei circuiti ideali, che sono quelli che si studiano in questa sede, i fili si considerano conduttori perfetti, cioè con resistenza nulla.

2.1.1 Il nodo

In un circuito possono incontrarsi più conduttori nello stesso punto. Questo punto prende il nome di **nodo**.

Concetto chiave

Un **nodo** è un punto del circuito in cui convergono **tre o più** conduttori. Due soli conduttori che si incontrano non formano un nodo, perché non c'è alcuna suddivisione della corrente: il punto è semplicemente un punto di collegamento tra due componenti in serie.

**Esempio**

In un circuito con una pila e due lampadine collegate in parallelo, il polo positivo della pila è collegato a un punto in cui il filo si dirama verso le due lampadine: quel punto è un nodo. Lo stesso vale per il polo negativo.

2.1.2 La maglia

Un altro concetto fondamentale è quello di maglia.

Concetto chiave

Una **maglia** è un qualsiasi percorso chiuso non intrecciato che parte da un nodo e ritorna allo stesso nodo senza passare due volte per lo stesso ramo. In altre parole, è un anello chiuso all'interno del circuito.

Una maglia può contenere al suo interno altri percorsi chiusi oppure no. Quando non ne contiene, si parla di **maglia elementare**.

Concetto chiave

Una **maglia elementare** (o maglia semplice) è una maglia che non contiene al suo interno altre maglie. In pratica, è il più piccolo anello chiuso che si può individuare in un circuito.

Attenzione

Saper distinguere tra maglie elementari e non elementari è importante perché, applicando la legge delle maglie, si scelgono di norma le maglie elementari. Le maglie non elementari danno equazioni che sono combinazione lineare di quelle elementari e non aggiungono informazione.

2.2 Generatori di tensione e di corrente

Concetto chiave

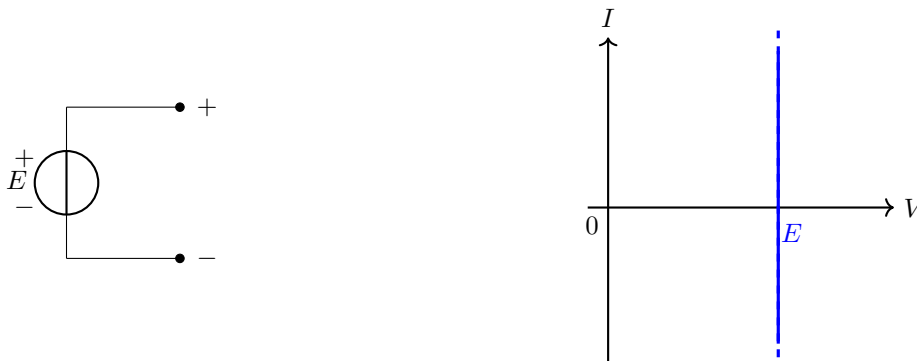
I **generatori** sono componenti attivi in grado di fornire energia al circuito. Si distinguono in **generatori di tensione**, che impongono una tensione tra i propri morsetti, e **generatori di corrente**, che impongono una corrente attraverso il proprio ramo. Ciascuno di essi può essere **ideale** (privo di perdite interne) oppure **reale** (caratterizzato da una resistenza interna).

2.2.1 Generatore ideale di tensione

Concetto chiave

Un **generatore ideale di tensione** è un bipolo che mantiene ai propri morsetti una tensione costante E , indipendentemente dal valore della corrente che lo attraversa.

La caratteristica tensione-corrente di un generatore ideale di tensione è una retta verticale nel piano I - V : la tensione è fissata a E , mentre la corrente può assumere qualsiasi valore, positivo o negativo, in funzione del carico collegato.



Un generatore ideale di tensione presenta una **resistenza interna nulla**. Ciò implica che, se i suoi morsetti vengono cortocircuitati, la corrente tende a valori infiniti: si tratta di una condizione limite non realizzabile fisicamente, ma utile come modello teorico.

Attenzione

Il cortocircuito di un generatore ideale di tensione è una condizione vietata nel calcolo: la corrente risulterebbe infinita. Nei circuiti reali la presenza di una resistenza interna limita automaticamente la corrente a un valore finito.

2.2.2 Generatore reale di tensione

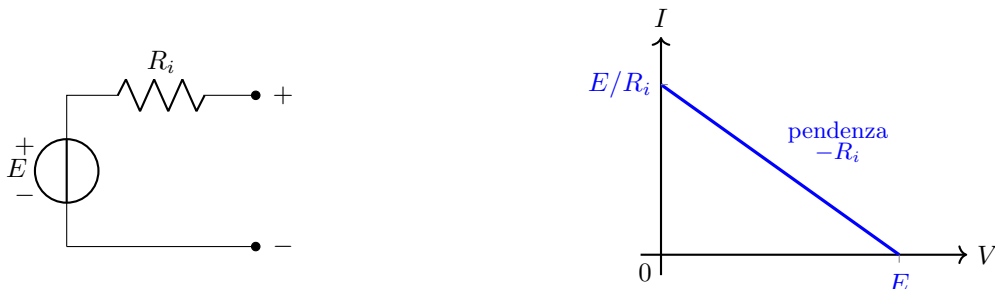
Concetto chiave

Un **generatore reale di tensione** è un bipolo equivalente a un generatore ideale di tensione E in serie con una resistenza interna R_i , che rappresenta le perdite del dispositivo.

La tensione ai morsetti di un generatore reale non è più costante, ma dipende dalla corrente erogata secondo la relazione:

$$V = E - R_i I$$

dove I è la corrente uscente dal morsetto positivo. Quando il generatore è a vuoto ($I = 0$), la tensione ai morsetti coincide con la forza elettromotrice E ; quando il generatore è sotto carico, la tensione diminuisce linearmente al crescere della corrente.



Nel piano I - V , la caratteristica di un generatore reale di tensione è una retta con pendenza $-R_i$: essa interseca l'asse delle tensioni in corrispondenza del valore E (funzionamento a vuoto) e l'asse delle correnti in corrispondenza del valore E/R_i (funzionamento in cortocircuito).

Concetto chiave

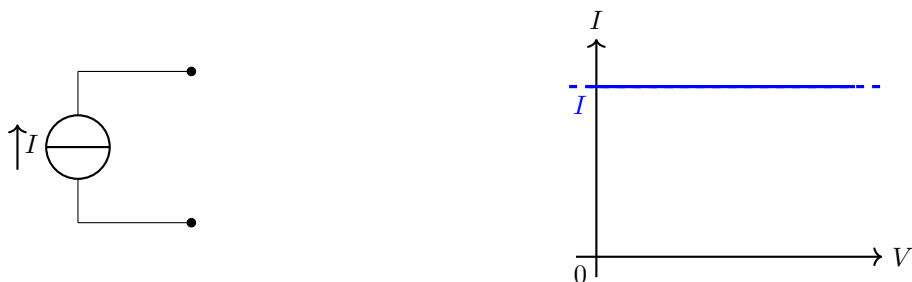
Nella pratica, un generatore di tensione reale è tanto migliore quanto più piccola è la sua resistenza interna R_i . Un alimentatore da laboratorio ben progettato ha R_i dell'ordine dei milliohm.

2.2.3 Generatore ideale di corrente

Concetto chiave

Un **generatore ideale di corrente** è un bipolo che mantiene nel proprio ramo una corrente costante I , indipendentemente dal valore della tensione ai propri morsetti.

La caratteristica di un generatore ideale di corrente è una retta orizzontale nel piano I - V : la corrente è fissata a I , mentre la tensione può assumere qualsiasi valore in funzione del carico.



Un generatore ideale di corrente presenta una **resistenza interna infinita**. Ciò implica che, se i suoi morsetti vengono lasciati aperti, la tensione tende a valori infiniti: anche questa è una condizione limite non realizzabile fisicamente.

Attenzione

Il circuito aperto ai capi di un generatore ideale di corrente è una condizione vietata nel calcolo: la tensione risulterebbe infinita. Nei circuiti reali la presenza di una resistenza interna in parallelo limita automaticamente la tensione a un valore finito.

2.2.4 Generatore reale di corrente

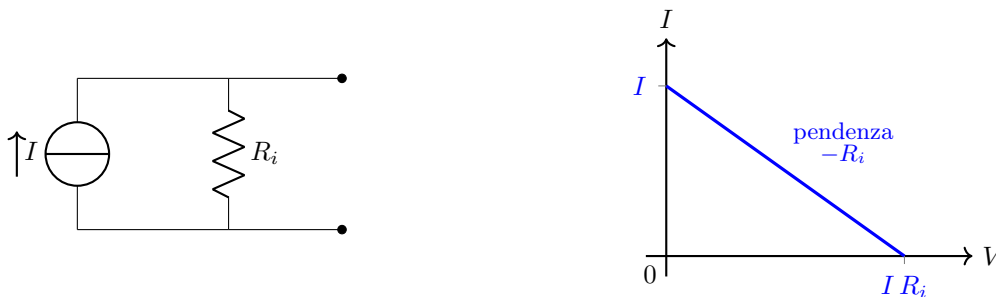
Concetto chiave

Un **generatore reale di corrente** è un bipolo equivalente a un generatore ideale di corrente I in parallelo con una resistenza interna R_i (o, equivalentemente, una conduttanza interna $G_i = 1/R_i$).

La corrente erogata da un generatore reale di corrente non è più costante, ma dipende dalla tensione ai morsetti secondo la relazione:

$$I_{\text{erogata}} = I - \frac{V}{R_i}$$

Quando i morsetti sono in cortocircuito ($V = 0$), la corrente erogata coincide con I ; quando la tensione ai morsetti cresce, una parte della corrente viene dirottata verso la resistenza interna e la corrente disponibile al carico diminuisce.

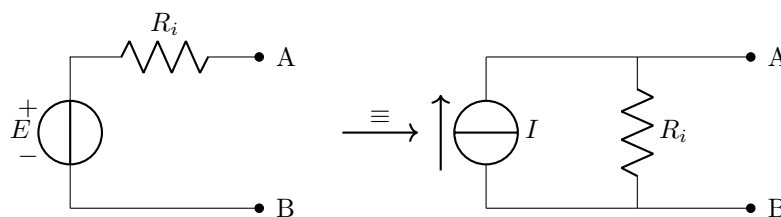


2.2.5 Equivalenza tra generatore reale di tensione e di corrente

Un generatore reale di tensione e un generatore reale di corrente sono **equivalenti** tra loro, nel senso che presentano la stessa caratteristica I - V vista dai morsetti esterni, purché valgano le relazioni:

$$E = I \cdot R_i, \quad I = \frac{E}{R_i}, \quad R_i^{(\text{tens.})} = R_i^{(\text{corr.})}$$

Verrà spiegata nel prossimo capitolo in maniera approfondita, ma questa equivalenza è alla base del **teorema di Thévenin** e del **teorema di Norton**: una qualsiasi rete lineare, vista da due morsetti, può essere rappresentata indifferentemente come un generatore reale di tensione (Thévenin) o come un generatore reale di corrente (Norton).



Concetto chiave

L'equivalenza vale solo *dall'esterno*: i due circuiti si comportano allo stesso modo visti dai morsetti A e B, ma al loro interno le grandezze fisiche sono diverse. In particolare, il generatore reale di tensione dissipa potenza sulla resistenza in serie anche a vuoto, mentre quello di corrente dissipa potenza sulla resistenza in parallelo anche in cortocircuito.

2.2.6 Esempio: passaggio da un generatore reale all'altro

Esempio

Si consideri un generatore reale di tensione con $E = 12\text{ V}$ e $R_i = 4\ \Omega$. Il generatore reale di corrente equivalente ha:

$$I = \frac{E}{R_i} = \frac{12}{4} = 3\text{ A}, \quad R_i = 4\ \Omega \text{ in parallelo.}$$

Viceversa, un generatore reale di corrente con $I = 2\text{ A}$ e $R_i = 5\ \Omega$ è equivalente a un generatore reale di tensione con:

$$E = I \cdot R_i = 2 \cdot 5 = 10\text{ V}, \quad R_i = 5\ \Omega \text{ in serie.}$$

In entrambi i casi, la caratteristica I - V vista dai morsetti esterni rimane invariata.

2.3 La legge di Kirchhoff alle Tensioni (legge delle maglie)

Concetto chiave

LKT (legge delle maglie). La somma algebrica delle tensioni lungo una maglia è nulla:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = 0 \quad \implies \quad \sum_k V_k = 0.$$

Equivalentemente, la somma delle forze elettromotrici presenti nella maglia è uguale alla somma delle cadute di tensione sui resistori:

$$\sum V = \sum R I.$$

Questa legge esprime il fatto che, percorrendo un percorso chiuso, si ritorna al punto di partenza con lo stesso potenziale: la somma dei guadagni di tensione deve uguagliare la somma delle perdite.

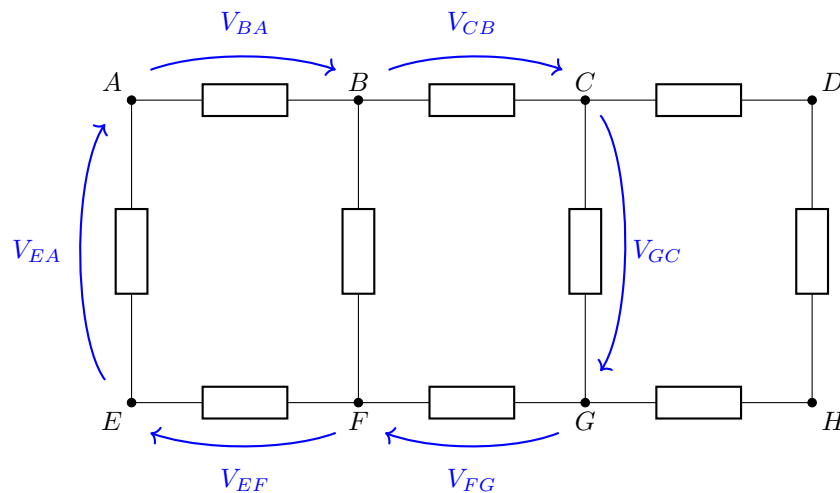
2.3.1 Dimostrazione LKT

Consideriamo il circuito in figura: è un circuito con **tre maglie**. I nodi sono otto in totale: quattro sul ramo superiore (A, B, C, D) e quattro sul ramo inferiore (E, F, G, H). Ogni ramo del circuito contiene un componente generico.

Vogliamo dimostrare la legge di Kirchhoff alle tensioni lungo il percorso chiuso

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow A,$$

che contiene esattamente **sei nodi**. Indichiamo con V_{BA} la differenza di potenziale tra il nodo B e il nodo A , cioè $V_{BA} = V_B - V_A$, e analogamente per gli altri tratti.



Percorriamo il percorso chiuso in senso orario, partendo dal nodo A e tornando al nodo A. Lungo il percorso incontriamo, nell'ordine, le sei differenze di potenziale indicate dalle frecce in figura:

$$V_{BA}, \quad V_{CB}, \quad V_{GC}, \quad V_{FG}, \quad V_{EF}, \quad V_{EA}.$$

La legge di Kirchhoff alle tensioni afferma che la somma algebrica delle variazioni di potenziale lungo un percorso chiuso è nulla. Percorrendo il cammino $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow A$, le variazioni di potenziale sono esattamente queste sei, e la loro somma deve essere zero:

$$V_{BA} + V_{CB} + V_{GC} + V_{FG} + V_{EF} + V_{EA} = 0.$$

Sostituendo le espressioni esplicite di ciascuna tensione:

$$(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_G - V_C) + (V_F - V_G) + (V_E - V_F) + (V_A - V_E) = 0.$$

Ora osserviamo cosa succede: ogni potenziale compare due volte, una con il segno $+$ e una con il segno $-$. Il potenziale V_B compare come $+V_B$ nel primo termine e come $-V_B$ nel secondo; il potenziale V_C compare come $+V_C$ nel secondo termine e come $-V_C$ nel terzo; e così via per tutti gli altri. I termini si cancellano a coppie:

$$V_B - V_A + V_C - V_B + V_G - V_C + V_F - V_G + V_E - V_F + V_A - V_E = 0.$$

Concetto chiave

La legge di Kirchhoff alle tensioni **non è una legge fisica nuova**: è una conseguenza del fatto che la tensione è una differenza di potenziale. Percorrendo un percorso chiuso, ogni nodo viene visitato due volte (una in entrata e una in uscita), e il suo potenziale si cancella. Per questo la somma delle differenze di potenziale lungo qualsiasi percorso chiuso è sempre nulla.

Questa proprietà vale per **qualsiasi** percorso chiuso, non solo per le maglie elementari. Nel nostro caso il percorso $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow A$ racchiude al suo interno due maglie elementari ($ABFE$ e $BCGF$), ma la LKT continua a valere.

2.3.2 La convenzione dei segni

Per applicare correttamente la seconda legge di Kirchhoff bisogna fissare una **convenzione dei segni** e seguirla con coerenza. La procedura è la seguente:

1. si sceglie arbitrariamente un **verso di percorrenza** della maglia (orario o antiorario);
2. per ogni **generatore** incontrato lungo il percorso, si attribuisce segno $+$ se si passa dal polo negativo al polo positivo (guadagno di tensione), segno $-$ se si passa dal polo positivo al polo negativo;
3. per ogni **resistore** percorso da una corrente I , si attribuisce segno $-$ alla caduta RI .

In forma compatta, scrivendo $\sum V_k = 0$ con questa convenzione, si ottiene direttamente l'equazione risolutiva.

Attenzione

Il verso di percorrenza scelto è arbitrario: cambiandolo si ottiene un'equazione equivalente, moltiplicata per -1 . Il risultato finale non cambia. La cosa importante è non cambiare convenzione a metà calcolo.

Esempio

Circuito con una sola maglia. Si consideri un circuito formato da una pila con forza elettromotrice $V = 12 \text{ [V]}$ e due resistori in serie, $R_1 = 4 \text{ [\Omega]}$ e $R_2 = 2 \text{ [\Omega]}$. Calcolare la corrente che circola nel circuito.

Soluzione. Il circuito ha una sola maglia. Scegliamo come verso di percorrenza quello orario. Percorrendo la maglia:

- attraverso la pila si passa dal polo negativo al polo positivo: guadagno $+V$;
- attraverso R_1 la corrente ha lo stesso verso del percorso: caduta $-R_1 I$;
- attraverso R_2 la corrente ha lo stesso verso del percorso: caduta $-R_2 I$.

La seconda legge di Kirchhoff fornisce

$$V - R_1 I - R_2 I = 0.$$

Da cui

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ [A]}.$$

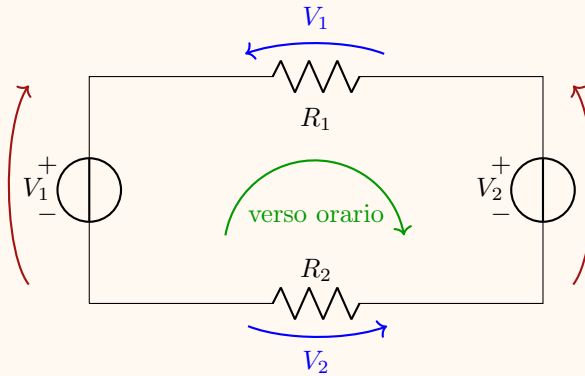
Esempio

Circuito con due generatori. Si consideri una maglia singola formata da:

- due generatori $V_1 = 12 \text{ [V]}$ e $V_2 = 6 \text{ [V]}$;
- due resistori, $R_1 = 3 \text{ [\Omega]}$ e $R_2 = 1 \text{ [\Omega]}$.

I due generatori sono disposti in modo che V_1 favorisca la corrente nel verso orario, mentre V_2 si opponga. Calcolare la corrente I che circola nella maglia.

Soluzione. Scegliamo come verso di percorrenza quello orario. Rappresentiamo la maglia e indichiamo con frecce le tensioni incontrate lungo il percorso.



Percorrendo la maglia in verso orario:

- attraverso V_1 si passa dal polo negativo al polo positivo: guadagno $+V_1$;
- attraverso R_1 e R_2 : caduta $V_1 = -R_1 I$ e $V_2 = -R_2 I$;
- attraverso V_2 si passa dal polo positivo al polo negativo: guadagno $-V_2$;

La legge di Kirchhoff alle Tensioni (LKT) fornisce:

$$V_1 - V_1 - V_2 - V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 - R_1 I - V_2 - R_2 I = 0.$$

Sostituendo i valori:

$$12 - 3I - 6 - 1I = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 4I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ [A]}.$$

Attenzione

La corrente positiva indica che il verso effettivo è quello orario, cioè quello scelto. Se invece il risultato fosse stato negativo, il verso scelto era opposto al verso della corrente.

Lo sapevi?

Le leggi di Kirchhoff valgono per qualsiasi circuito, indipendentemente dal numero di componenti. Anche i circuiti integrati più complessi, con miliardi di transistori, vengono analizzati con gli stessi due principi. La potenza del metodo sta nella sua semplicità: due leggi, applicate con coerenza, bastano per risolvere qualsiasi rete lineare.

2.4 La legge di Kirchhoff alle Correnti (legge dei nodi)

Concetto chiave

LKC (legge dei nodi). In un nodo, la somma delle correnti che entrano è uguale alla somma delle correnti che escono:

$$\sum I_{\text{entranti}} = \sum I_{\text{uscenti}}.$$

Equivalentemente, attribuendo segno positivo alle correnti entranti e negativo a quelle uscenti (o

viceversa), la somma algebrica di tutte le correnti che confluiscono in un nodo è nulla:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Questa legge esprime un principio di conservazione: la carica elettrica non può accumularsi in un nodo né sparire, quindi tanta carica entra quanta esce nell'unità di tempo.

Esempio

Nodo con tre rami. In un nodo convergono tre conduttori. Nel primo entra una corrente $I_1 = 3 \text{ [A]}$, nel secondo entra una corrente $I_2 = 1 \text{ [A]}$. Quanta corrente esce dal terzo ramo?

Soluzione. Applichiamo la legge dei nodi:

$$I_1 + I_2 = I_3 \implies I_3 = 3 + 1 = 4 \text{ [A]}.$$

Dal terzo ramo escono 4 [A] .

Esempio

Nodo con quattro rami. In un nodo entrano $I_1 = 5 \text{ [A]}$ e $I_2 = 2 \text{ [A]}$, mentre escono $I_3 = 3 \text{ [A]}$ e I_4 incognita. Determinare I_4 .

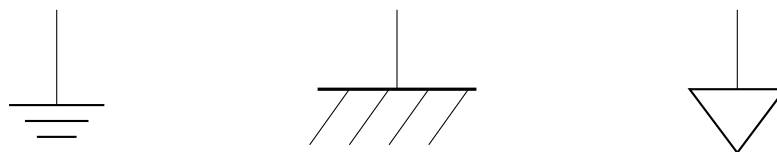
Soluzione.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \implies 5 + 2 = 3 + I_4 \implies I_4 = 4 \text{ [A]}.$$

2.5 La massa

Concetto chiave

La **massa** (in inglese *ground*, spesso indicata con il simbolo $\perp$ o GND) è un **punto di riferimento** del circuito al quale si attribuisce per convenzione il potenziale elettrico $V = 0 \text{ [V]}$. Tutti gli altri potenziali del circuito vengono misurati rispetto a questo punto.



Nei circuiti elettrici la massa si può rappresentare con simboli diversi, a seconda della convenzione e del contesto. I tre simboli più comuni sono:

- il simbolo con le **tre linee orizzontali decrescenti** è il più tradizionale, usato da decenni nei libri di elettrotecnica;
- il simbolo con le **tre linee oblique parallele** indica invece la massa di telaio (chassis), tipica degli apparecchi elettronici;
- il simbolo con il **triangolino vuoto rivolto verso il basso** è la convenzione più moderna e viene usato soprattutto nei software di simulazione e nei circuiti integrati.

2.5.1 Perché serve un riferimento

Una tensione non è mai un valore assoluto: è sempre una **differenza di potenziale tra due punti**. Dire “in questo punto c’è una tensione di 5 [V]” non ha senso se non si specifica *rispetto a che cosa*.

Per capirlo, si può pensare all’altezza. Se si dice “sono alto 10 [m]”, la frase è ambigua: 10 [m] rispetto a cosa? Se ci si trova al secondo piano di un palazzo, l’altezza rispetto al pavimento del piano è circa 1,7 [m], mentre l’altezza rispetto al livello del mare è molto maggiore. L’“altezza” cambia a seconda del **riferimento** scelto. Eppure la posizione fisica è sempre la stessa: quello che cambia è solo il numero usato per descriverla.

Lo stesso vale per il potenziale elettrico. In un circuito, il potenziale di un nodo non ha un valore assoluto: ha senso solo se confrontato con un altro nodo. Per evitare di dover specificare ogni volta “rispetto a questo nodo”, si sceglie un nodo di riferimento e lo si chiama **massa**. A quel nodo si assegna $V = 0$ [V], e tutti gli altri potenziali si misurano rispetto a lui.

Esempio

- Il **pavimento del piano** è come la massa: è il livello rispetto al quale si misurano tutte le altezze dentro quell’appartamento.
- L’altezza di una persona (1,7 [m]) è come la tensione di un nodo rispetto alla massa.
- Cambiando appartamento e prendendo come riferimento un altro pavimento, i numeri cambiano, ma la posizione fisica no.

Per questo la scelta della massa è **arbitraria**: il funzionamento del circuito non dipende da dove viene messa. È solo una convenzione comoda, che permette di parlare di “potenziale di un nodo” senza specificare ogni volta rispetto a che cosa.

Attenzione

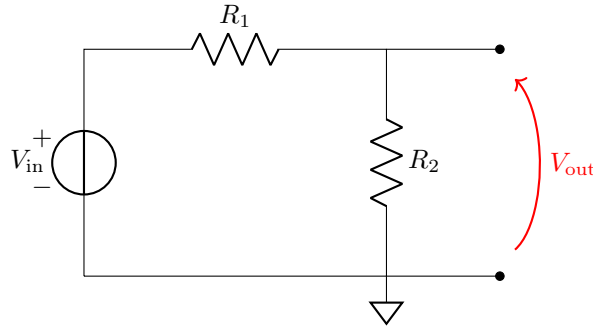
La massa **non** è un componente che “assorbe” corrente o che “scarica” la corrente a terra. È solo un’**etichetta** che indica: “questo nodo è il riferimento, il suo potenziale vale 0 [V]”. Nei circuiti reali la massa è spesso collegata allo chassis metallico del dispositivo o alla terra vera e propria (impianto di terra), ma concettualmente è solo un punto scelto come riferimento.

2.6 Partitore di tensione

Concetto chiave

Il **partitore di tensione** è un circuito formato da due o più resistori in serie. Esso permette di ottenere, ai capi di un resistore, una frazione della tensione totale applicata. È una conseguenza della legge di Ohm e della legge di Kirchhoff alle tensioni.

Si consideri una serie di due resistori R_1 e R_2 alimentata da una tensione V_{in} . La tensione di uscita V_{out} è prelevata ai capi di R_2 . Il terminale negativo del generatore è collegato alla **massa**, cioè al nodo di riferimento a cui si attribuisce $V = 0$ [V].



Dimostrazione. Poiché R_1 e R_2 sono in serie, sono percorsi dalla stessa corrente I . Applicando la legge di Kirchhoff alle tensioni all'unica maglia:

$$V_{\text{in}} = V_{R_1} + V_{R_2}.$$

Per la legge di Ohm:

$$V_{R_1} = R_1 I, \quad V_{R_2} = R_2 I.$$

Sostituendo:

$$V_{\text{in}} = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I.$$

Da cui la corrente:

$$I = \frac{V_{\text{in}}}{R_1 + R_2}.$$

La tensione ai capi di R_2 è:

$$V_{\text{out}} = V_{R_2} = R_2 I = R_2 \frac{V_{\text{in}}}{R_1 + R_2}.$$

Quindi la formula del partitore di tensione è:

Concetto chiave

$$V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Analogamente, la tensione ai capi di R_1 sarebbe

$$V_{R_1} = V_{\text{in}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Proprietà. Il resistore più grande ha ai suoi capi la tensione maggiore.

Esempio numerico

Un partitore di tensione ha $V_{\text{in}} = 12 \text{ [V]}$, $R_1 = 4 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 2 \text{ [\Omega]}$. Calcolare V_{out} ai capi di R_2 .

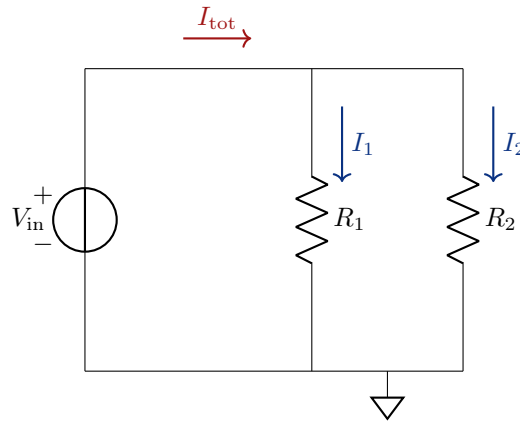
$$V_{\text{out}} = 12 \cdot \frac{2}{4 + 2} = 12 \cdot \frac{2}{6} = 4 \text{ [V]}.$$

2.7 Partitore di corrente

Concetto chiave

Il **partitore di corrente** è un circuito formato da due o più resistori in parallelo. Esso permette di dividere una corrente totale in più rami. La corrente in ciascun ramo è inversamente proporzionale alla resistenza del ramo stesso.

Si considerino due resistori R_1 e R_2 collegati in parallelo, alimentati da una corrente totale I_{tot} . La corrente si divide nei due rami in I_1 e I_2 . Il nodo inferiore destro è collegato alla **massa**, cioè al riferimento a cui si attribuisce $V = 0 \text{ [V]}$.



Dimostrazione. Poiché R_1 e R_2 sono in parallelo, ai loro capi c'è la stessa tensione V , misurata rispetto alla massa. Per la legge di Kirchhoff alle correnti applicata al nodo di ingresso:

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2.$$

Per la legge di Ohm:

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}.$$

Sostituendo:

$$I_{\text{tot}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Quindi:

$$I_{\text{tot}} = V \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \implies V = I_{\text{tot}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ora si calcolano le correnti nei due rami:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{1}{R_1} I_{\text{tot}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_{\text{tot}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{1}{R_2} I_{\text{tot}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_{\text{tot}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Pertanto le formule del partitore di corrente sono:

$$\boxed{I_1 = I_{\text{tot}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \boxed{I_2 = I_{\text{tot}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Proprietà.

- La corrente si ripartisce in proporzione inversa alle resistenze: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$.
- Il ramo con resistenza maggiore è percorso da corrente minore.

Esempio numerico

Un partitore di corrente ha $I_{\text{tot}} = 6 \text{ [A]}$, $R_1 = 2 \text{ [\Omega]}$, $R_2 = 4 \text{ [\Omega]}$. Calcolare I_1 e I_2 .

$$I_1 = 6 \cdot \frac{4}{2 + 4} = 6 \cdot \frac{4}{6} = 4 \text{ [A]},$$

$$I_2 = 6 \cdot \frac{2}{2+4} = 6 \cdot \frac{2}{6} = 2 \text{ [A]}.$$

Verifica: $I_1 + I_2 = 4 + 2 = 6 \text{ [A]} = I_{\text{tot.}}$

2.8 Resistenza equivalente

Concetto chiave

Due o più resistori possono essere collegati tra loro in due modi fondamentali: in **serie** o in **parallelo**. Da queste due configurazioni si ricava la **resistenza equivalente**, cioè il valore di un unico resistore che si comporta come l'insieme dei resistori considerati.

2.8.1 Il collegamento in serie

Concetto chiave

Due o più resistori sono collegati **in serie** quando sono disposti uno dopo l'altro, in modo che la **stessa corrente** li attraversi tutti. Non ci sono diramazioni tra un resistore e il successivo.



Applicando la legge di Kirchhoff alle tensioni all'unica maglia, la tensione totale è la somma delle tensioni sui singoli resistori:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I.$$

Dividendo per I :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

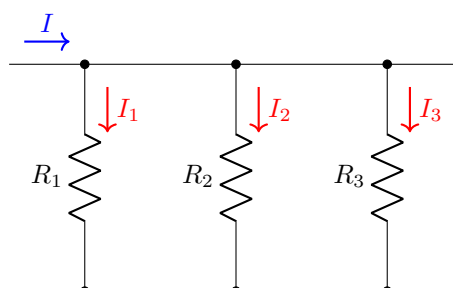
Concetto chiave

La resistenza equivalente di più resistori in serie è la **somma** delle singole resistenze. È quindi **sempre maggiore** della più grande delle resistenze collegate.

2.8.2 Il collegamento in parallelo

Concetto chiave

Due o più resistori sono collegati **in parallelo** quando sono connessi tra gli stessi due nodi, in modo che ai loro capi ci sia la **stessa tensione**. La corrente totale si ripartisce tra i vari rami.



Applicando la legge di Kirchhoff alle correnti al nodo superiore, la corrente totale è la somma delle correnti nei singoli rami:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Dividendo per V :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \implies R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots}$$

Esempio

L'analogia dei due muratori. Un muro deve essere dipinto. Il primo muratore, da solo, impiegherebbe 6 ore a completare il lavoro. Il secondo muratore, da solo, è più veloce e impiegherebbe 3 ore. Se lavorano **insieme**, quanto tempo impiegano a dipingere il muro? Non si possono sommare i tempi ($6 + 3 = 9$ ore): sarebbe come dire che, lavorando insieme, ci mettono più tempo di quando lavorano da soli. Il ragionamento corretto consiste nel sommare le **velocità di lavoro**, non i tempi.

Il primo muratore dipinge $\frac{1}{6}$ di muro in un'ora. Il secondo ne dipinge $\frac{1}{3}$ in un'ora. Insieme, in un'ora, dipingono:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Quindi insieme completano **metà muro in un'ora**. Per dipingere l'intero muro impiegano:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ ore.}$$

Lavorando insieme, i due muratori impiegano 2 ore, un tempo **minore** di quello del più veloce dei due (3 ore). Questo risultato non sorprende: due persone che lavorano in parallelo sullo stesso muro sono più efficienti di una sola.

Lo stesso ragionamento si applica ai resistori in parallelo. Un resistore, in un circuito, è come un “muratore”: più è piccola la sua resistenza, più corrente farà passare.

Muratori	Resistori in parallelo
Muro da dipingere	Tensione applicata V
Muratore	Resistore
Tempo impiegato da solo	Resistenza R
Velocità di lavoro ($\frac{1}{\text{tempo}}$)	Conduttanza $\frac{1}{R}$
Velocità totale	Conduttanza totale $\frac{1}{R_{eq}}$
Tempo impiegato insieme	Resistenza equivalente R_{eq}

Il punto chiave è che **le velocità si sommano**, mentre i tempi no. In termini elettrici, le **conduttanze** (cioè gli inversi delle resistenze) si sommano:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Esempio elettrico. Siano $R_1 = 6 \Omega$ e $R_2 = 3 \Omega$ collegati in parallelo. Vogliamo la resistenza equivalente. Non si sommano le resistenze ($6 + 3 = 9 \Omega$ sarebbe un errore): si sommano le conduttanze.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Omega^{-1}.$$

Quindi:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Omega.$$

La resistenza equivalente è 2Ω , un valore **minore** della più piccola delle due resistenze collegate ($R_2 = 3 \Omega$). Esattamente come nel caso dei muratori: il lavoro insieme è più veloce del più veloce dei due.

L'analogia dei muratori mostra in modo intuitivo perché nel parallelo le resistenze non si sommano: ciò che si somma è la **capacità di far passare corrente** (la conduttanza). Più rami in parallelo offrono percorsi alternativi alla corrente, e questo riduce la resistenza equivalente. Per lo stesso motivo, la R_{eq} di un parallelo è **sempre minore** della più piccola delle resistenze collegate.

Per due soli resistori in parallelo la formula si semplifica:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Esempio

Due resistori in parallelo. Due resistori $R_1 = 100 \Omega$ e $R_2 = 150 \Omega$ sono in parallelo. La resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = \frac{100 \cdot 150}{100 + 150} = \frac{15000}{250} = 60 \Omega.$$

60Ω è minore sia di 100Ω sia di 150Ω , come deve essere.

Calcolo a coppie successive

La formula del parallelo gode di una proprietà molto comoda: si può applicare **a coppie successive**. Quando si hanno tre o più resistori in parallelo, non è necessario applicare la formula generale con tutte le resistenze insieme; si può invece procedere così:

1. si calcola la resistenza equivalente dei **primi due** resistori;
2. si considera il risultato come un **unico resistore** e lo si mette in parallelo al terzo;
3. si ripete il procedimento aggiungendo un resistore alla volta, fino a esaurirli tutti.

Questa proprietà si chiama **associatività del parallelo** e deriva dal fatto che il parallelo tra due resistori produce a sua volta un resistore, che si comporta esattamente come i due originali. Non importa in quale ordine si accoppiano i resistori: il risultato finale è sempre lo stesso.

Esempio

Quattro resistori in parallelo. Siano $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ e $R_4 = 2 \Omega$. Calcolare la resistenza equivalente procedendo a coppie.

Passo 1. $R_1 \parallel R_2$: $R_{12} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = \frac{72}{18} = 4 \Omega$. **Passo 2.** $R_{12} \parallel R_3$: $R_{123} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \Omega$

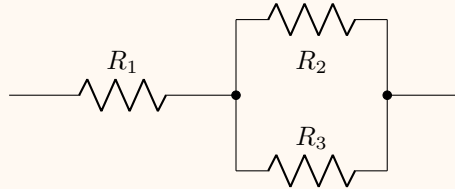
Passo 3. $R_{123} \parallel R_4$: $R_{eq} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \Omega$ $R_{eq} = 1 \Omega$

2.8.3 Serie e parallelo combinati

Molti circuiti contengono resistori collegati in modo misto. Per calcolare la resistenza equivalente si procede **per riduzioni successive**: si individuano le parti puramente in serie o puramente in parallelo, si sostituiscono con la loro resistenza equivalente, e si ripete fino a ottenere un unico resistore.

Esempio

Circuito misto. $R_1 = 10\ \Omega$ in serie con il parallelo di $R_2 = 20\ \Omega$ e $R_3 = 30\ \Omega$.



Prima il parallelo:

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\ \Omega.$$

Si procede ridisegnando il circuito, sostituendo il parallelo $R_2 \parallel R_3$ con il resistore equivalente R_{23} :



Poi la serie:

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = 10 + 12 = 22\ \Omega.$$

Attenzione

Per riconoscere se due resistori sono in serie o in parallelo bisogna guardare la **topologia del circuito**, non la loro posizione nel disegno. Due resistori sono in serie se sono percorsi dalla stessa corrente (non c'è alcun nodo tra loro); sono in parallelo se sono collegati tra gli stessi due nodi.

Capitolo 3

Metodi di risoluzione delle reti

3.1 Il metodo delle correnti di maglia

Concetto chiave

Il **metodo delle correnti di maglia** (o metodo di Maxwell) consiste nell'associare a ogni maglia elementare del circuito una **corrente fittizia** che la percorre in senso chiuso. Le correnti reali dei rami si ottengono poi come combinazione algebrica delle correnti di maglia.

L'idea alla base del metodo è semplice: invece di scrivere un'equazione per ogni ramo del circuito, si scrive **un'equazione per ogni maglia elementare**. In questo modo il numero di equazioni è pari al numero di maglie, che è generalmente inferiore al numero di rami.

3.1.1 La procedura

La procedura per applicare il metodo delle correnti di maglia è la seguente:

1. si individuano tutte le **maglie elementari** del circuito;
2. si assegna a ciascuna maglia una **corrente di maglia** $I_1, I_2, \dots$, scegliendo arbitrariamente un verso di percorrenza (di solito tutte nello stesso verso, per esempio orario);
3. si scrive per ogni maglia la **legge di Kirchhoff alle tensioni**, esprimendo le cadute di tensione sui resistori in funzione delle correnti di maglia;
4. si risolve il sistema di equazioni così ottenuto, trovando i valori delle correnti di maglia;
5. si ricavano le **correnti reali dei rami** sommando algebricamente le correnti di maglia che attraversano quel ramo.

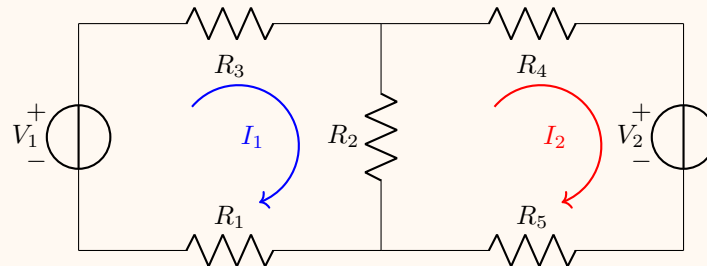
Attenzione

La corrente di maglia non è una corrente fisica: è un artificio di calcolo. Solo le correnti dei rami hanno un significato fisico. In un ramo percorso da più correnti di maglia, la corrente reale è la somma algebrica di esse.

3.1.2 Esempio di applicazione

Esempio

Circuito con due maglie. Vogliamo calcolare le correnti che attraversano i rami.



Soluzione. Individuiamo due maglie elementari: la maglia di sinistra (percorsa da I_1 in senso orario) e la maglia di destra (percorsa da I_2 in senso orario).

Per la maglia di sinistra, applicando la LKT:

$$V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_1 - R_2 I_1 + R_2 I_2 = 0.$$

Il termine $+R_2 I_2$ tiene conto del fatto che il resistore R_2 è percorso anche da I_2 con verso opposto rispetto a I_1 .

Per la maglia di destra:

$$-V_2 - R_4 I_2 - R_5 I_2 - R_2 I_2 + R_2 I_1 = 0.$$

Raccogliendo i termini:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = V_1 \\ -R_2 I_1 + (R_4 + R_5 + R_2) I_2 = -V_2 \end{cases}$$

Con valori numerici $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$, $V_1 = 10\text{ V}$, $V_2 = 4\text{ V}$:

$$\begin{cases} 5 I_1 - 3 I_2 = 10 \\ -3 I_1 + 5 I_2 = -4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, troviamo i valori delle due correnti fittizie:

$$I_1 = 2,375\text{ A} \quad I_2 = 0,625\text{ A}.$$

La corrente nel ramo centrale (percorsa da R_2) è la differenza tra le due correnti di maglia:

$$I_{R_2} = I_1 - I_2 = 2,375 - 0,625 = 1,75\text{ A}.$$

3.2 Il principio di sovrapposizione degli effetti

Concetto chiave

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** afferma che in un circuito lineare con più generatori, la corrente (o la tensione) in un qualsiasi ramo è la **somma algebrica** degli effetti prodotti da ciascun generatore considerato singolarmente, con tutti gli altri generatori spenti.

Spegnere un generatore significa:

- sostituire un **generatore di tensione** con un **corto circuito**;
- sostituire un **generatore di corrente** con un **circuito aperto**.

3.2.1 La procedura

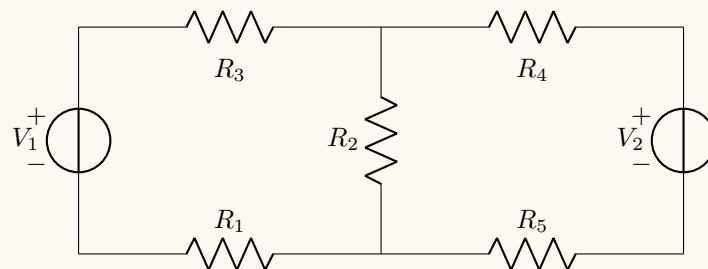
1. si considera acceso un solo generatore alla volta, spegnendo tutti gli altri;
2. per ogni generatore, si calcola la corrente (o la tensione) richiesta nel ramo di interesse;
3. si sommano algebricamente i contributi di tutti i generatori, tenendo conto dei versi.

Attenzione

Il principio di sovrapposizione vale solo per circuiti **lineari**, cioè quelli in cui la relazione tra tensione e corrente è lineare (come la legge di Ohm). Non vale per componenti non lineari come diodi o transistor.

Esempio

Circuito con due maglie risolto con la sovrapposizione degli effetti. Riprendiamo lo stesso circuito dell'esempio precedente: due maglie, cinque resistori e due generatori. Vogliamo calcolare la corrente nel ramo centrale usando il principio di sovrapposizione degli effetti.



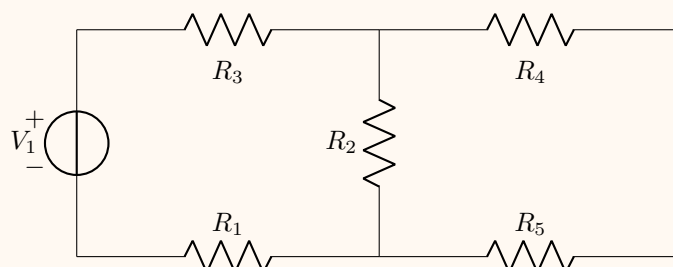
Procedura. Il principio di sovrapposizione degli effetti si applica in tre passi:

1. si spegne V_2 (sostituendolo con un corto circuito) e si calcola il contributo di V_1 da solo;
2. si spegne V_1 (sostituendolo con un corto circuito) e si calcola il contributo di V_2 da solo;
3. si sommano algebricamente i due contributi per ottenere la corrente reale.

I valori numerici sono: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$, $V_1 = 10\text{ V}$, $V_2 = 4\text{ V}$.

Passo 1: acceso solo V_1

Spegniamo V_2 sostituendolo con un filo (corto circuito). Il circuito diventa:



Con V_2 spento, il resistore R_5 viene collegato direttamente al nodo inferiore destro e il resistore R_4 al nodo superiore destro, entrambi in parallelo al ramo di R_2 .

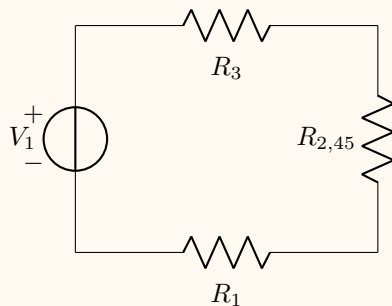
Possiamo procedere in due modi: o ridurre il circuito, oppure applicare direttamente il partitore di tensione. Vediamo il metodo della riduzione.

Il ramo di destra, formato da R_4 e R_5 in serie, ha resistenza:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 1 + 1 = 2 \Omega.$$

Questo ramo è in parallelo a R_2 , quindi la resistenza equivalente del parallelo è:

$$R_{2,45} = \frac{R_2 \cdot R_{45}}{R_2 + R_{45}} = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{6}{5} = 1,2 \Omega.$$



Ora il circuito è una maglia unica formata da V_1 , R_1 , R_3 e $R_{2,45}$ in serie. La resistenza totale è:

$$R_{\text{tot}}^{(1)} = R_1 + R_3 + R_{2,45} = 1 + 1 + 1,2 = 3,2 \Omega.$$

La corrente totale che circola nel circuito è: $I_{\text{tot}}^{(1)} = \frac{V_1}{R_{\text{tot}}^{(1)}} = \frac{10}{3,2} = 3,125 \text{ A}$.

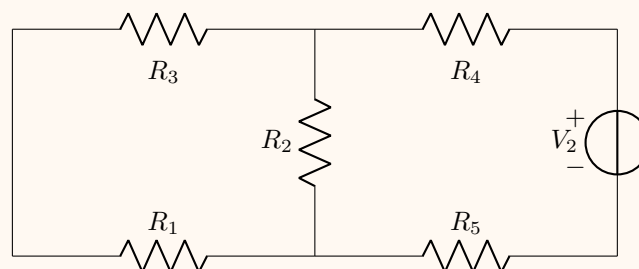
Questa corrente passa attraverso R_1 e R_3 , poi arriva al parallelo $R_2 \parallel R_{45}$ e si ripartisce. La corrente che attraversa R_2 si calcola con il partitore di corrente:

$$I_{R_2}^{(1)} = I_{\text{tot}}^{(1)} \cdot \frac{R_{45}}{R_2 + R_{45}} = 3,125 \cdot \frac{2}{3 + 2} = 3,125 \cdot 0,4 = \boxed{1,25 \text{ A} = I_{R_2}^{(1)}}.$$

Quindi il contributo di V_1 alla corrente in R_2 è: $I_{R_2}^{(1)} = 1,25 \text{ A}$, diretta dall'alto verso il basso (cioè dal nodo superiore a quello inferiore).

Passo 2: acceso solo V_2

Spegniamo V_1 sostituendolo con un filo (corto circuito). Il circuito diventa:



Con V_1 spento, il resistore R_1 viene collegato direttamente al nodo inferiore sinistro e il resistore R_3 al nodo superiore sinistro, entrambi in parallelo al ramo di R_2 .

Il ramo di sinistra, formato da R_1 e R_3 in serie, ha resistenza: $R_{13} = R_1 + R_3 = 1 + 1 = 2 \Omega$.

Questo ramo è in parallelo a R_2 , quindi la resistenza equivalente del parallelo è:

$$R_{2,13} = \frac{R_2 \cdot R_{13}}{R_2 + R_{13}} = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{6}{5} = 1,2 \Omega.$$

Ora il circuito è una maglia unica formata da V_2 , R_4 , R_5 e $R_{2,13}$ in serie. La resistenza totale è:

$$R_{\text{tot}}^{(2)} = R_4 + R_5 + R_{2,13} = 1 + 1 + 1,2 = 3,2 \Omega.$$

La corrente totale che circola nel circuito è: $I_{\text{tot}}^{(2)} = \frac{V_2}{R_{\text{tot}}^{(2)}} = \frac{4}{3,2} = 1,25 \text{ A}.$

Questa corrente passa attraverso R_4 e R_5 , poi arriva al parallelo $R_2 \parallel R_{13}$ e si ripartisce. La corrente che attraversa R_2 si calcola con il partitore di corrente:

$$I_{R_2}^{(2)} = I_{\text{tot}}^{(2)} \cdot \frac{R_{13}}{R_2 + R_{13}} = 1,25 \cdot \frac{2}{3 + 2} = 1,25 \cdot 0,4 = 0,5 \text{ A}.$$

Quindi il contributo di V_2 alla corrente in R_2 è: $I_{R_2}^{(2)} = 0,5 \text{ A}.$

Passo 3: somma dei contributi

I due contributi hanno **verso concorde** nel ramo centrale:

- $I_{R_2}^{(1)} = 1,25 \text{ A}$ diretto dall'alto verso il basso;
- $I_{R_2}^{(2)} = 0,5 \text{ A}$ diretto dall'alto verso il basso.

Prendiamo come verso positivo quello dall'alto verso il basso. Allora:

$$I_{R_2} = I_{R_2}^{(1)} + I_{R_2}^{(2)} = 1,25 + 0,5 = 1,75 \text{ A}.$$

La corrente nel ramo centrale è quindi $1,75 \text{ A}$, diretta dall'alto verso il basso.

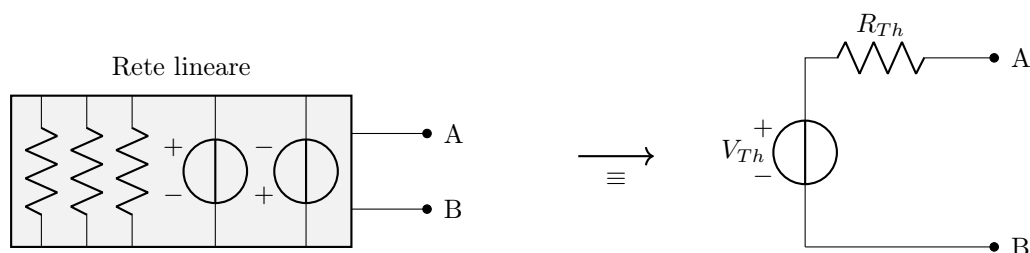
3.3 Il teorema di Thévenin

Concetto chiave

Il **teorema di Thévenin** afferma che qualsiasi rete lineare, vista da due terminali A e B, può essere sostituita da un **circuito equivalente** formato da un solo generatore di tensione V_{Th} in serie con un solo resistore R_{Th} .

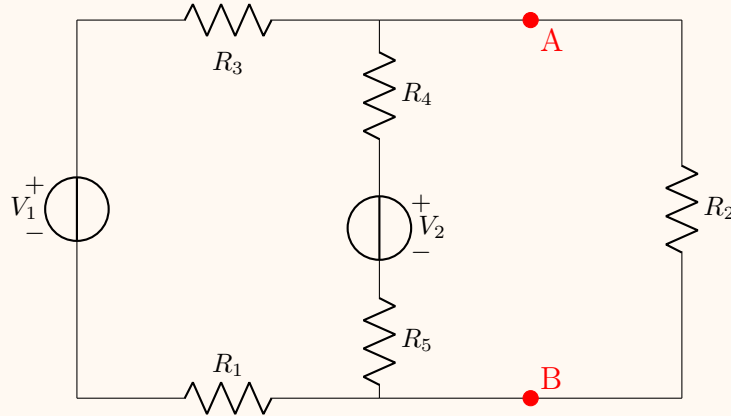
I due parametri del circuito equivalente si calcolano così:

- V_{Th} è la **tensione a vuoto** tra i terminali A e B, cioè la tensione misurata quando non è collegato alcun carico;
- R_{Th} è la **resistenza equivalente** vista dai terminali A e B, calcolata spegnendo tutti i generatori indipendenti (generatori di tensione cortocircuitati, generatori di corrente aperti).

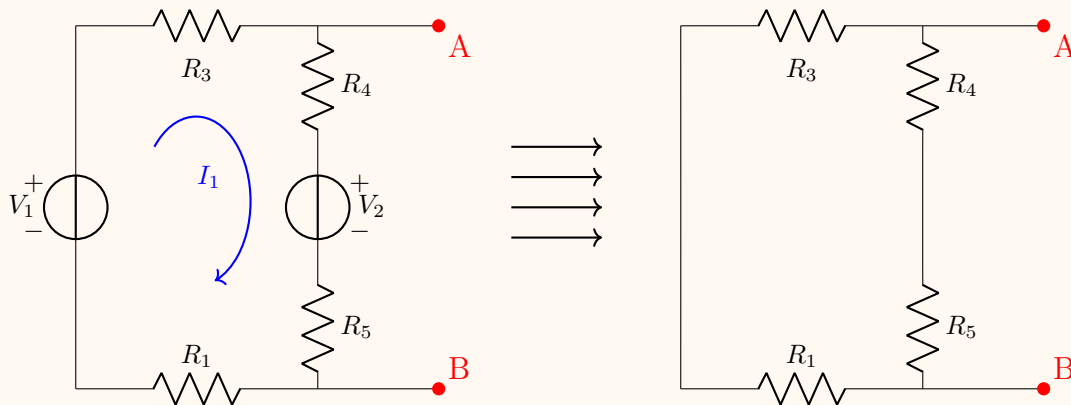


Esempio

Calcolo del circuito equivalente. Si consideri il circuito usato negli esempi precedenti. Vogliamo il circuito equivalente di Thévenin visto ai capi di R_2 . Ridisegniamo il circuito per capire meglio dove poter identificare la porta AB:



Procediamo quindi a staccare il resistore R_2 e calcoliamo la tensione letta sulla porta AB e la resistenza equivalente:



Resistenza equivalente di Thévenin: Spegliamo i generatori e guardiamo la resistenza tra A e B: R_1 e R_3 risultano in serie, così come R_4 e R_5 . Queste due serie sono poi in parallelo tra loro:

$$R_{Th} = (R_1 + R_3) \parallel (R_4 + R_5) = \frac{(R_1 + R_3)(R_4 + R_5)}{(R_1 + R_3) + (R_4 + R_5)} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \Omega.$$

Tensione di Thévenin. Con il resistore R_2 staccato, la porta AB è aperta e il circuito è formato da una sola maglia. Possiamo procedere applicando il metodo delle correnti di maglia per trovare la corrente che circola nella maglia al fine di determinare la tensione ai capi dei vari resistori, prendendo come riferimento un verso di corrente preso in senso orario:

$$V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_1 - R_4 I_1 - R_5 I_1 - V_2 = 0$$

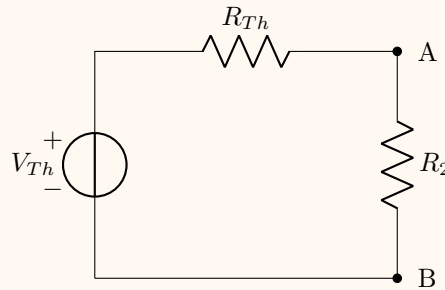
$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{10 - 4}{1 + 1 + 1 + 1} = 1,5 \text{ A}.$$

Possiamo dunque calcolare la tensione tra A e B, a prescindere dal percorso che decidiamo di scegliere:

$$V_{AB} = V_{Th} = V_1 - R_3 I_1 - R_1 I_1 = 10 - 1 \cdot 1,5 - 1 \cdot 1,5 = 7 \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_{Th} = V_2 + R_4 I_1 + R_5 I_1 = 4 + 1 \cdot 1,5 + 1 \cdot 1,5 = 7 \text{ V}$$

Circuito equivalente di Thévenin. Una volta noti i due parametri, possiamo sostituire tutta la rete di sinistra con il suo circuito equivalente: un generatore di tensione V_{Th} in serie con un resistore R_{Th} , e ricollegare ai terminali A e B il carico R_2 che avevamo staccato.



Il circuito equivalente di Thévenin è formato da:

- un generatore di tensione $V_{Th} = 7 \text{ V}$;
- un resistore $R_{Th} = 1 \Omega$ in serie al generatore;
- il carico $R_2 = 3 \Omega$ collegato tra i terminali A e B.

Calcolo della corrente in R_2 . Il circuito è ora una singola maglia: il generatore V_{Th} , il resistore R_{Th} e il carico R_2 sono tutti in serie. La corrente che li attraversa è unica e si calcola applicando la legge di Ohm all'intera maglia:

$$I_{R_2} = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_2} = \frac{7}{1 + 3} = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ A}.$$

La corrente che attraversa R_2 è quindi $1,75 \text{ A}$, diretta dal terminale A al terminale B (cioè dall'alto verso il basso nel disegno).

Verifica di coerenza. Lo stesso valore era stato ottenuto:

- con il metodo delle correnti di maglia: $I_{R_2} = I_1 - I_2 = 2,375 - 0,625 = 1,75 \text{ A}$;
- con il principio di sovrapposizione degli effetti: $I_{R_2} = I_{R_2}^{(1)} + I_{R_2}^{(2)} = 1,25 + 0,5 = 1,75 \text{ A}$.

Il fatto che tutti e tre i metodi conducano allo stesso risultato conferma la correttezza dei calcoli e l'equivalenza dei procedimenti.

3.4 Il teorema di Norton

Concetto chiave

Il **teorema di Norton** è il duale del teorema di Thévenin. Afferma che qualsiasi rete lineare, vista da due terminali A e B, può essere sostituita da un **circuito equivalente** formato da un solo generatore di corrente I_N in parallelo con un solo resistore R_N .

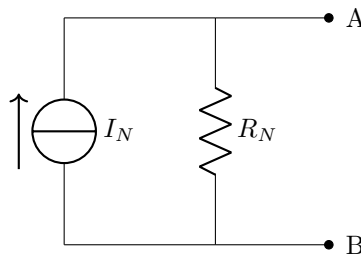
I due parametri del circuito equivalente si calcolano così:

- I_N è la **corrente di cortocircuito** tra i terminali A e B, cioè la corrente che scorre nel filo che collega direttamente A con B;
- R_N è la **resistenza equivalente** vista dai terminali A e B, calcolata spegnendo tutti i generatori indipendenti (generatori di tensione cortocircuitati, generatori di corrente aperti). Essa coincide con la resistenza di Thévenin: $R_N = R_{Th}$.

La relazione tra i parametri di Thévenin e Norton è:

$$V_{Th} = I_N \cdot R_N, \quad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}.$$

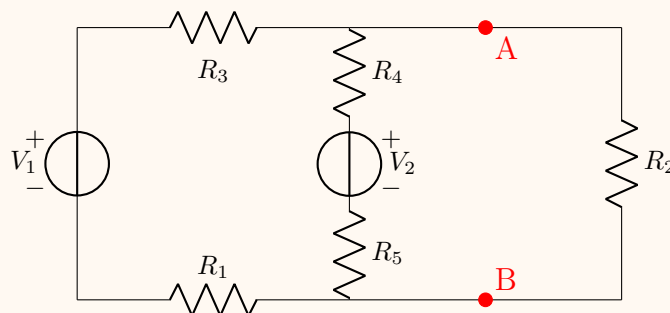
Conoscendo uno dei due circuiti equivalenti, si passa immediatamente all'altro.



Esempio

Calcolo del circuito equivalente di Norton. Riprendiamo lo stesso circuito usato per il teorema di Thévenin: due maglie, cinque resistori e due generatori. Vogliamo il circuito equivalente di Norton visto ai capi di R_2 .

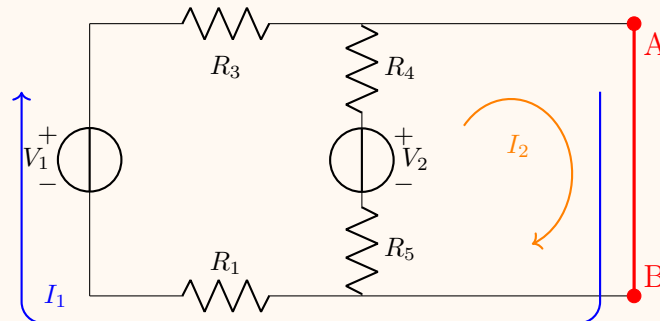
I valori numerici sono: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$, $V_1 = 10\text{ V}$, $V_2 = 4\text{ V}$.



Resistenza equivalente di Norton. La resistenza R_N è la stessa di Thévenin: si stacca R_2 , si spengono i generatori (cortocircuitando V_1 e V_2) e si guarda la resistenza tra A e B. I rami R_1 – R_3 e R_4 – R_5 risultano in serie tra loro e in parallelo tra A e B:

$$R_N = R_{Th} = (R_1 + R_3) \parallel (R_4 + R_5) = \frac{(R_1 + R_3)(R_4 + R_5)}{(R_1 + R_3) + (R_4 + R_5)} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\ \Omega.$$

Corrente di cortocircuito I_N . Per calcolare I_N si stacca R_2 e si collega direttamente il terminale A con il terminale B mediante un filo ideale. Il circuito si riduce a due maglie collegate dal cortocircuito centrale. Conviene applicare il **metodo delle correnti di maglia**, assegnando a ciascuna maglia una corrente in senso orario.



Scriviamo le due equazioni di maglia.

Maglia 'grande' (percorsa da I_1 in senso orario):

$$V_1 - I_1 (R_1 + R_3) = 0$$

Maglia elementare a destra (percorsa da I_2 in senso orario):

$$V_2 - I_2 (R_4 + R_5) = 0$$

Risolvendo: $I_1 = 5[A]$, $I_2 = 2[A]$ perciò la corrente di corto circuito è $I_N = I_1 + I_2 = 7[A]$.

Circuito equivalente di Norton. I due parametri sono quindi:

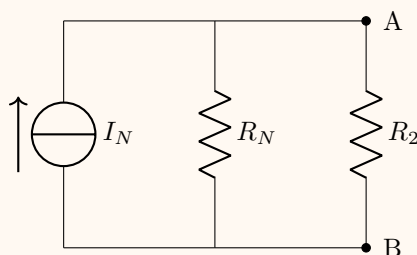
$$R_N = 1\Omega, \quad I_N = 7\text{ A.}$$

Verifica di coerenza con Thévenin. Dalla relazione $V_{Th} = I_N \cdot R_N$:

$$V_{Th} = 7 \cdot 1 = 7\text{ V},$$

che coincide esattamente con la tensione a vuoto calcolata con il teorema di Thévenin. La verifica conferma la coerenza dei due metodi.

Ritorno alla corrente in R_2 . Una volta noti I_N e R_N , possiamo ricavare la corrente che attraversa R_2 ricollegando il carico al circuito equivalente di Norton.



La corrente nel carico R_2 si ottiene con il partitore di corrente tra R_N e R_2 :

$$I_{R_2} = I_N \cdot \frac{R_N}{R_N + R_2} = 7 \cdot \frac{1}{1 + 3} = 1,75\text{ A.}$$

Lo stesso risultato era stato ottenuto con il metodo delle correnti di maglia e con il principio di sovrapposizione degli effetti: 1,75 A.

3.5 Il metodo dei potenziali ai nodi

Concetto chiave

Il **metodo dei potenziali ai nodi** consiste nell'assumere come incognite i **potenziali dei nodi** del circuito, invece delle correnti. Si sceglie un nodo come riferimento (massa, potenziale 0 V) e si scrivono le equazioni di Kirchhoff alle correnti per tutti gli altri nodi.

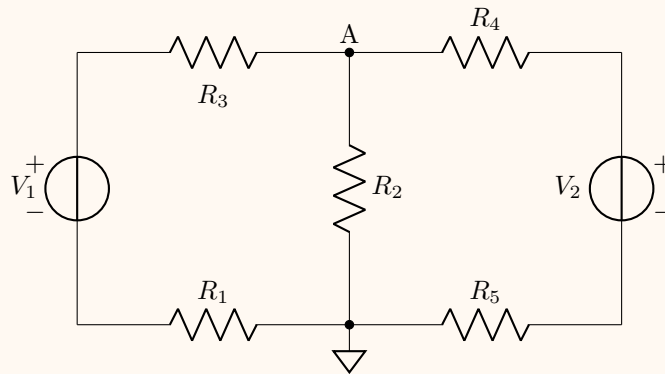
3.5.1 La procedura

1. si sceglie un nodo come **riferimento** (massa) e si pone $V = 0$;
2. si assegnano simboli ai potenziali degli altri nodi ($V_1, V_2, \dots$);
3. per ogni nodo (tranne quello di riferimento) si scrive la **legge di Kirchhoff alle correnti**, esprimendo le correnti in funzione dei potenziali dei nodi e delle resistenze;
4. si risolve il sistema di equazioni, trovando i potenziali;
5. si ricavano le correnti nei rami applicando la legge di Ohm.

Esempio

Circuito con tre nodi. Riprendiamo lo stesso circuito usato negli esempi precedenti: due maglie, cinque resistori e due generatori. Vogliamo calcolare la corrente che attraversa R_2 usando il metodo dei potenziali ai nodi.

I valori numerici sono: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $V_1 = 10 \text{ V}$, $V_2 = 4 \text{ V}$.



Soluzione. Possiamo scegliere come **nodo di riferimento** il nodo B (nodo centrale inferiore), ponendo $V_B = 0$. L'unica incognita è il potenziale del nodo A (nodo centrale superiore), che chiameremo V_A .

Possiamo allora applicare la **legge di Kirchhoff alle correnti** al nodo superiore: la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

Le correnti nei tre rami collegati al nodo superiore sono:

- nel ramo di sinistra, la corrente entrante è $\frac{V_1 - V_A}{R_1 + R_3}$;
- nel ramo centrale, la corrente uscente da A verso B è $\frac{V_A - V_B}{R_2} = \frac{V_A}{R_2}$;
- nel ramo di destra, la corrente uscente da A verso E è $\frac{V_A - V_2}{R_4 + R_5}$.

Applicando la LKC al nodo A :

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1 + R_3} = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_2}{R_4 + R_5}.$$

Sostituiamo i valori numerici e troviamo il valore di V_A :

$$V_A = 5.25[V].$$

Corrente nel resistore R_2 . Una volta noto V_A , la corrente che attraversa R_2 si calcola applicando la legge di Ohm:

$$I_{R_2} = \frac{V_A}{R_2} = \frac{5.25}{3} = 1.75 \text{ A}.$$

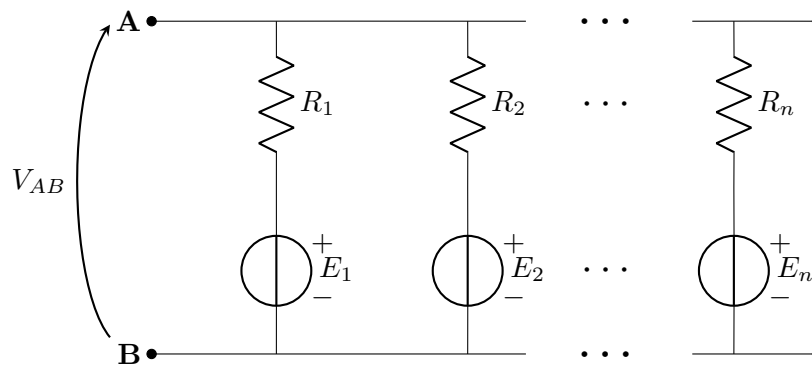
La corrente è diretta dal nodo A al nodo B , cioè dall'alto verso il basso nel disegno.

3.6 Il teorema di Millman

Concetto chiave

Il **teorema di Millman** permette di calcolare la tensione ai capi di una rete formata da più rami in parallelo, ciascuno formato da un generatore di tensione in serie con un resistore. La tensione comune ai capi del parallelo è:

$$V = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}}.$$

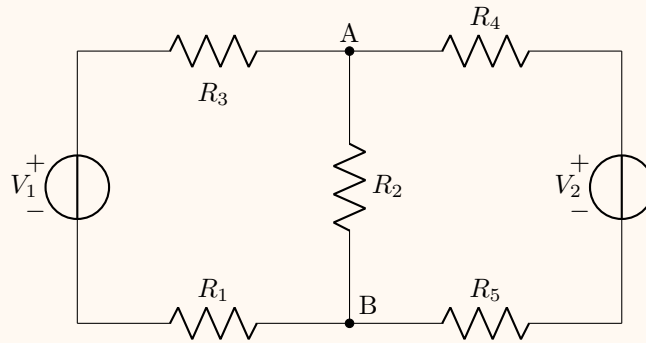


Il teorema di Millman è una conseguenza diretta del metodo dei potenziali ai nodi applicato a un circuito con un solo nodo indipendente.

Esempio

Applicazione del teorema di Millman al circuito a due maglie. Riprendiamo lo stesso circuito usato negli esempi precedenti: due maglie, cinque resistori e due generatori. Vogliamo calcolare la tensione tra i nodi A (superiore) e B (inferiore) e da essa ricavare la corrente che attraversa R_2 , usando il teorema di Millman.

I valori numerici sono: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $V_1 = 10 \text{ V}$, $V_2 = 4 \text{ V}$.



Soluzione. Il teorema di Millman si applica a una rete formata da più rami in parallelo, ciascuno costituito da un generatore di tensione in serie con un resistore. Per poterlo usare, dobbiamo riconoscere nel circuito tre rami collegati tra i due nodi A e B :

- **Ramo di sinistra:** contiene V_1 , R_3 e R_1 , in serie tra loro. La resistenza equivalente di questo ramo è $R_{13} = R_1 + R_3 = 1 + 1 = 2\Omega$. Il generatore equivalente è $V_1 = 10\text{ V}$.
- **Ramo centrale:** contiene solo R_2 . Non ha generatori, quindi si comporta come un ramo con $V = 0$ e resistenza $R_2 = 3\Omega$.
- **Ramo di destra:** contiene V_2 , R_4 e R_5 , in serie tra loro. La resistenza equivalente è $R_{45} = R_4 + R_5 = 1 + 1 = 2\Omega$. Il generatore equivalente è $V_2 = 4\text{ V}$.

Possiamo quindi applicare la formula di Millman ai tre rami in parallelo tra i nodi A e B :

$$V_{AB} = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}} = \frac{\frac{10}{2} + \frac{0}{3} + \frac{4}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{5 + 0 + 2}{\frac{8}{6}} = 7 \cdot \frac{3}{4} = 5,25\text{ V}.$$

La tensione tra i nodi A e B è quindi $V_{AB} = 5,25\text{ V}$, positiva da A verso B .

Corrente nel resistore R_2 . Una volta nota V_{AB} , la corrente che attraversa R_2 si calcola applicando la legge di Ohm al ramo centrale:

$$I_{R_2} = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{5,25}{3} = 1,75\text{ A}.$$

La corrente è diretta dal nodo A al nodo B , cioè dall'alto verso il basso nel disegno.